Método SIMPLEX

Marcone Jamilson Freitas Souza

Departamento de Computação
Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação
Universidade Federal de Ouro Preto
http://www.decom.ufop.br/prof/marcone
E-mail: marcone@iceb.ufop.br

Resolução gráfica de PPL’s

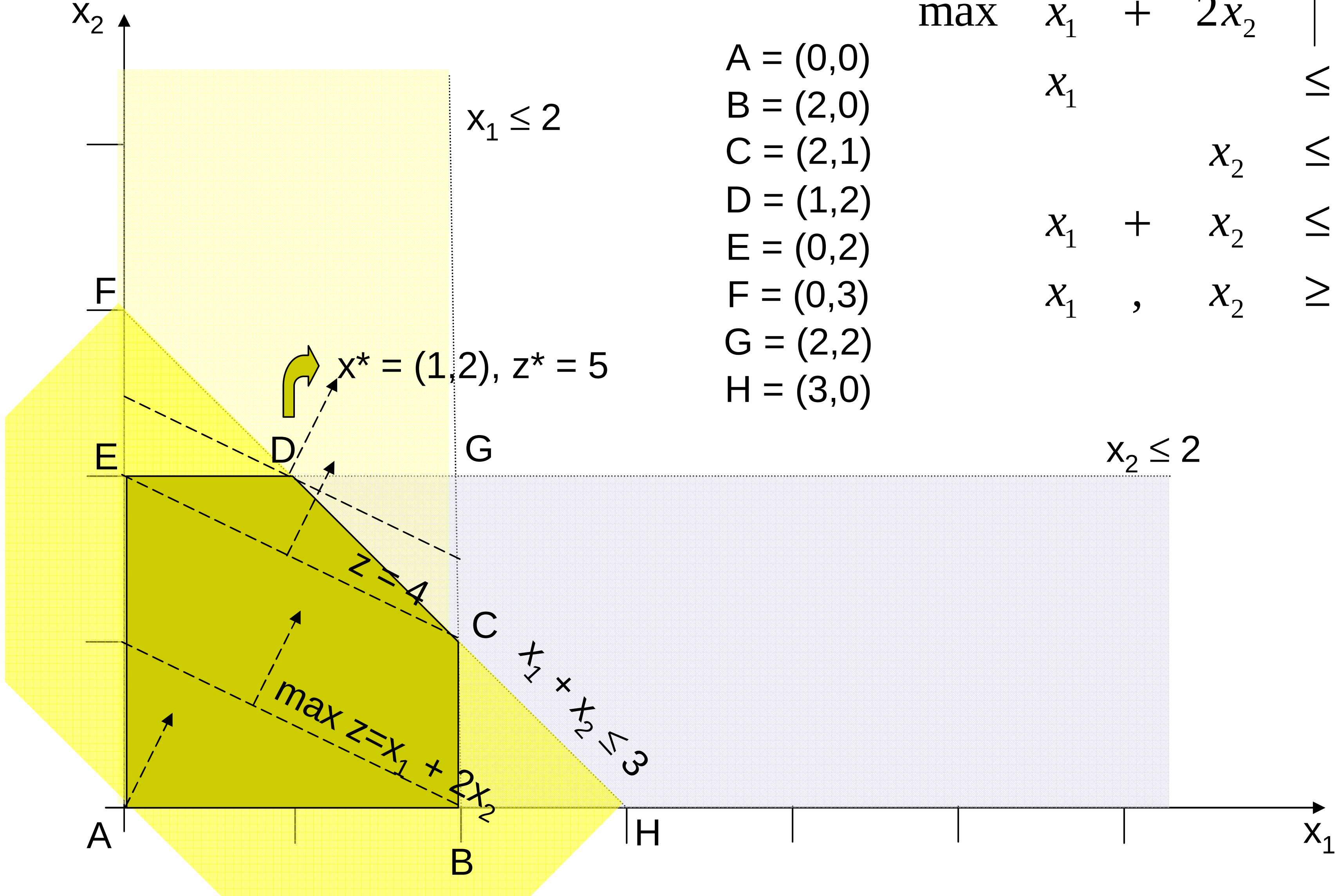
- Passos para resolver graficamente um PPL:
  a) Determinar o gradiente da função objetivo (Gradiente é perpendicular à reta definida pela função objetivo)
  b) Caminhar no sentido e direção do gradiente da função objetivo até tangenciar a região viável
  c) O ponto de tangência representa a solução ótima x*

Fundamentação do Método SIMPLEX

Seja resolver o seguinte PPL:

$$
\begin{array}{lcccccc}
\max & x_1 & + & 2x_2 & & \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Fundamentação do Método SIMPLEX



A = (0,0)
B = (2,0)
C = (2,1)
D = (1,2)
E = (0,2)
F = (0,3)
G = (2,2)
H = (3,0)

$$
\begin{array}{lcccc}
\max & x_1 & + & 2x_2 & \\
 & x_1 & & & \leq 2 \\
 & & & x_2 & \leq 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

Teorema Fundamental da Programação Linear

- O ótimo de um PPL, se existir, ocorre em pelo menos um vértice do conjunto de soluções viáveis.
- Situações que podem ocorrer com relação ao conjunto M de soluções viáveis:

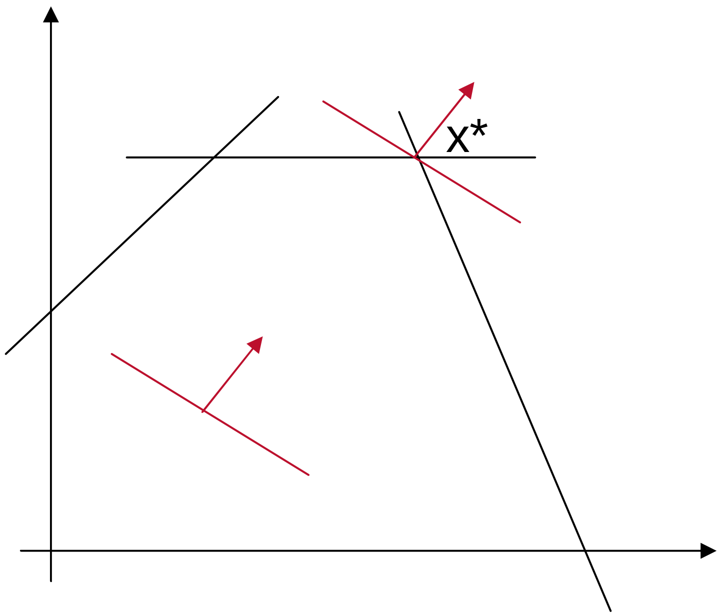
1) M = {}

   Neste caso não há solução viável => Não há solução ótima

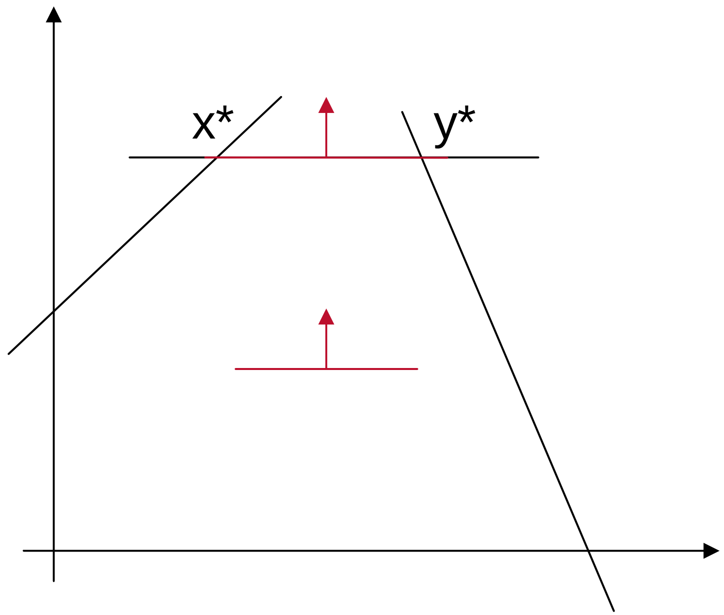
Teorema Fundamental da Programação Linear

2) M é não vazio

   a) M é limitado



Única solução ótima, a qual é vértice

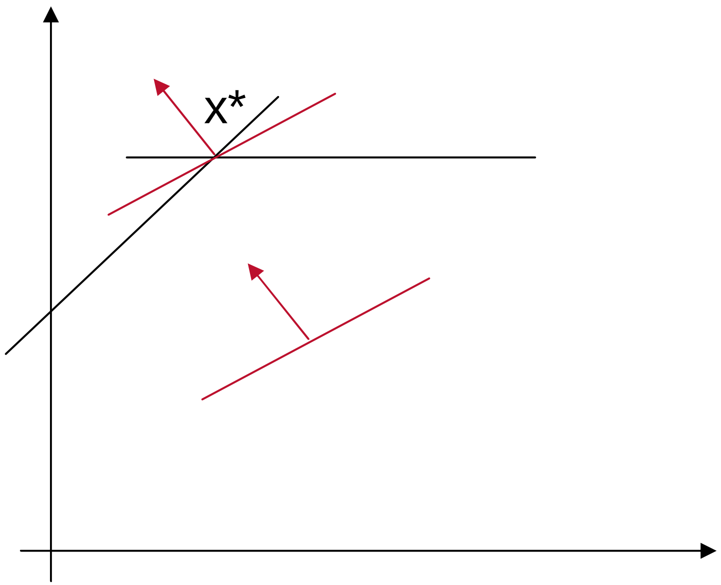


Infinidade de soluções ótimas, e pelo menos uma é vértice (no caso, duas são vértices)

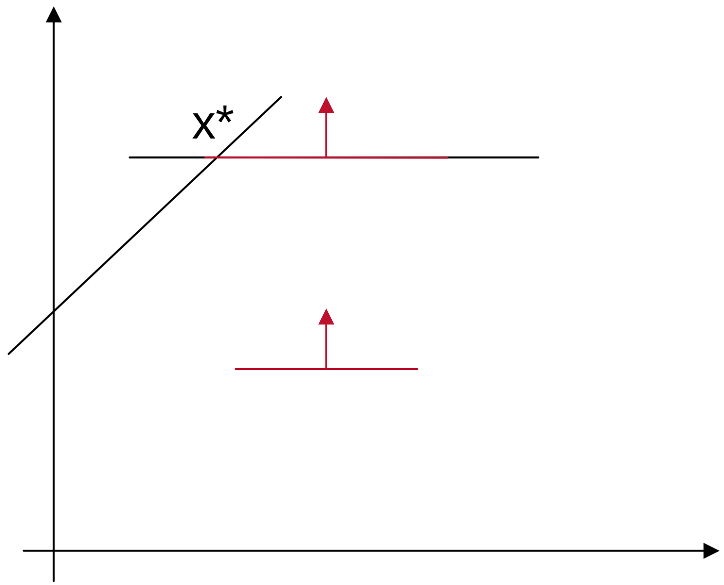
Teorema Fundamental da Programação Linear

2) M é não vazio

b) M é ilimitado



Única solução ótima, a qual é vértice

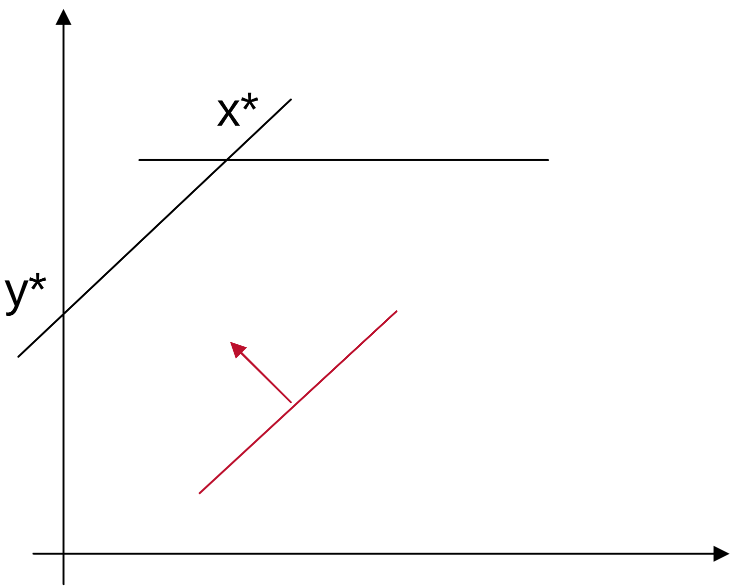


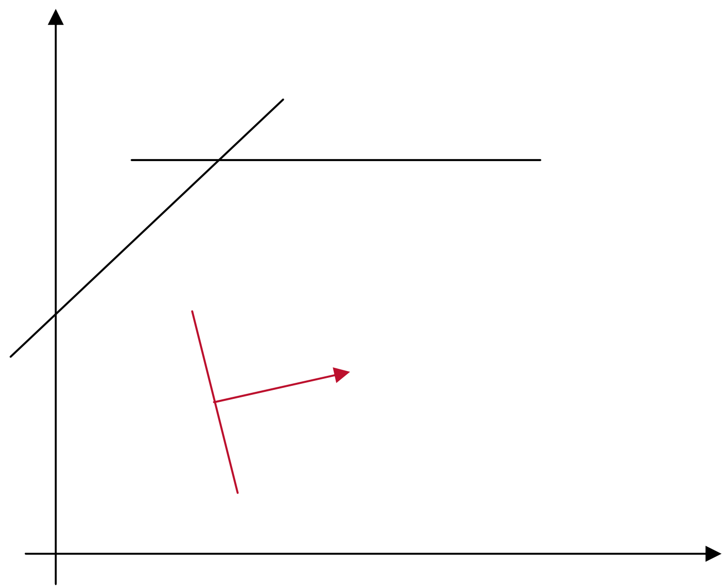
Infinidade de soluções ótimas, sendo uma vértice

Teorema Fundamental da Programação Linear

2) M é não vazio

   b) M é ilimitado





Infinidade de soluções ótimas, e pelo menos uma vértice (no caso, duas são vértices)

Não há soluções ótimas

Forma-padrão de um PPL

- PPL está na forma-padrão quando é posto na forma:

$$(\min)\,\text{ou}\,(\max)\, z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad \forall i = 1,\ldots,m$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j = 1,\ldots,n$$

sendo $b_i \geq 0 \quad \forall i = 1,\ldots,m$

Redução de um PPL qualquer à forma-padrão

- Restrições do tipo ≤

$$2x_1 + 3x_2 \leq 5 \quad \Longrightarrow \quad 2x_1 + 3x_2 + \underbrace{x_3}_{x_3 \geq 0} = 5$$

- Restrições do tipo ≥

$$x_1 + 6x_2 \geq 7 \quad \Longrightarrow \quad x_1 + 6x_2 - \underbrace{x_4}_{x_4 \geq 0} = 7$$

Redução de um PPL qualquer à forma-padrão

- Existe $b_i < 0$

  Solução: Basta multiplicar restrição i por -1

- Existem variáveis não-positivas:

  Seja $x_k \leq 0$:

  Solução: Criar variável x_k' tal que $x_k' = -x_k$

  Assim, modelo terá variável $x_k' \geq 0$

Redução de um PPL qualquer à forma-padrão

- Existem variáveis livres, isto é, variáveis x_k que podem assumir qualquer valor real (negativo, nulo ou positivo):

<u>Solução</u>: Substituir x_k por $x_k' - x_k''$, com $x_k' \geq 0$ e $x_k'' \geq 0$

$$x_k' > x_k'' \iff x_k > 0$$

$$x_k' = x_k'' \iff x_k = 0$$

$$x_k' < x_k'' \iff x_k < 0$$

- PPL é de maximização:

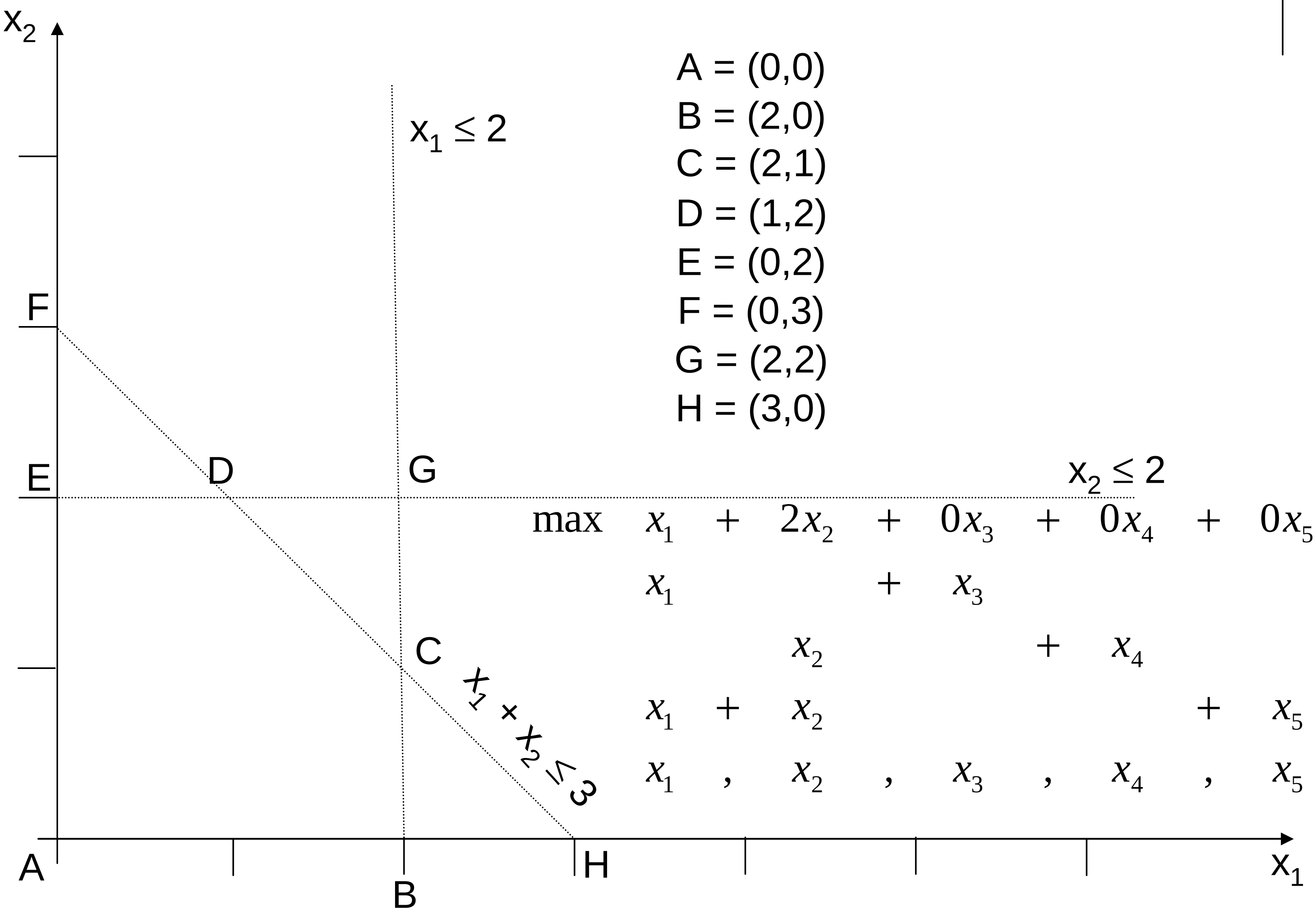
$$\max f(x) = - \min \{-f(x)\}$$

Caracterização de vértice

$$
\begin{array}{llll}
\max & x_1 + 2x_2 & & \\
 & x_1 & \leq & 2 \\
 & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 + x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1 , x_2 & \geq & 0
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{llll}
\max & x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 & & \\
 & x_1 + x_3 & = & 2 \\
 & x_2 + x_4 & = & 2 \\
 & x_1 + x_2 + x_5 & = & 3 \\
 & x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{A}}
\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{\text{x}}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\text{b}}
$$

Caracterização de vértice

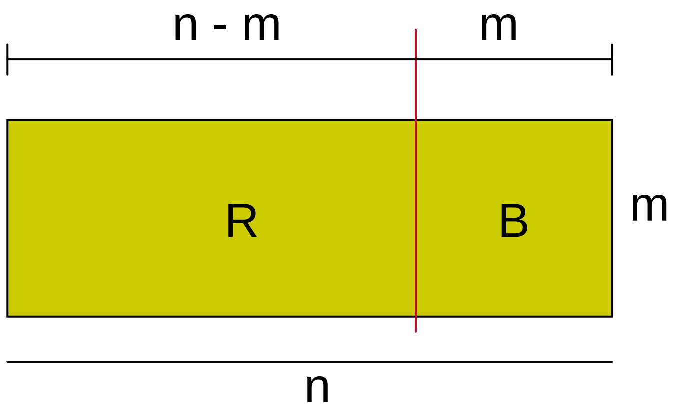


A = (0,0)
B = (2,0)
C = (2,1)
D = (1,2)
E = (0,2)
F = (0,3)
G = (2,2)
H = (3,0)

$$
\begin{array}{lccccccccccl}
\max & x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & & \\
 & x_1 & & & + & x_3 & & & & & = & 2 \\
 & & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Caracterização de vértice

- Em um ponto no interior do conjunto (não pertencente a nenhuma aresta) não há variáveis nulas
- Em uma aresta há, pelo menos, uma variável nula
- Em um vértice há, pelo menos, n-m variáveis nulas



Caracterização de vértice

- Para gerar um vértice:
  - Escolher uma matriz não-singular B tal que:

$$Bx^B + Rx^R = b$$

  - Fazer $x^R = 0$
  - Se ao resolver o sistema $Bx^B = b$, for obtido $x^B \geq 0$, então $x = (x^B\ x^R)^t = (x^B\ 0)^t$ é vértice
- Deste procedimento resulta uma **Solução Básica Viável** (**SBV**), com o significado geométrico de **vértice**.

Definições

- B = base
- $x = (x^B \ x^R)^t$
  - x^B = vetor das variáveis básicas
  - x^R = vetor das variáveis não-básicas
- Solução Básica (SB): vetor x tal que

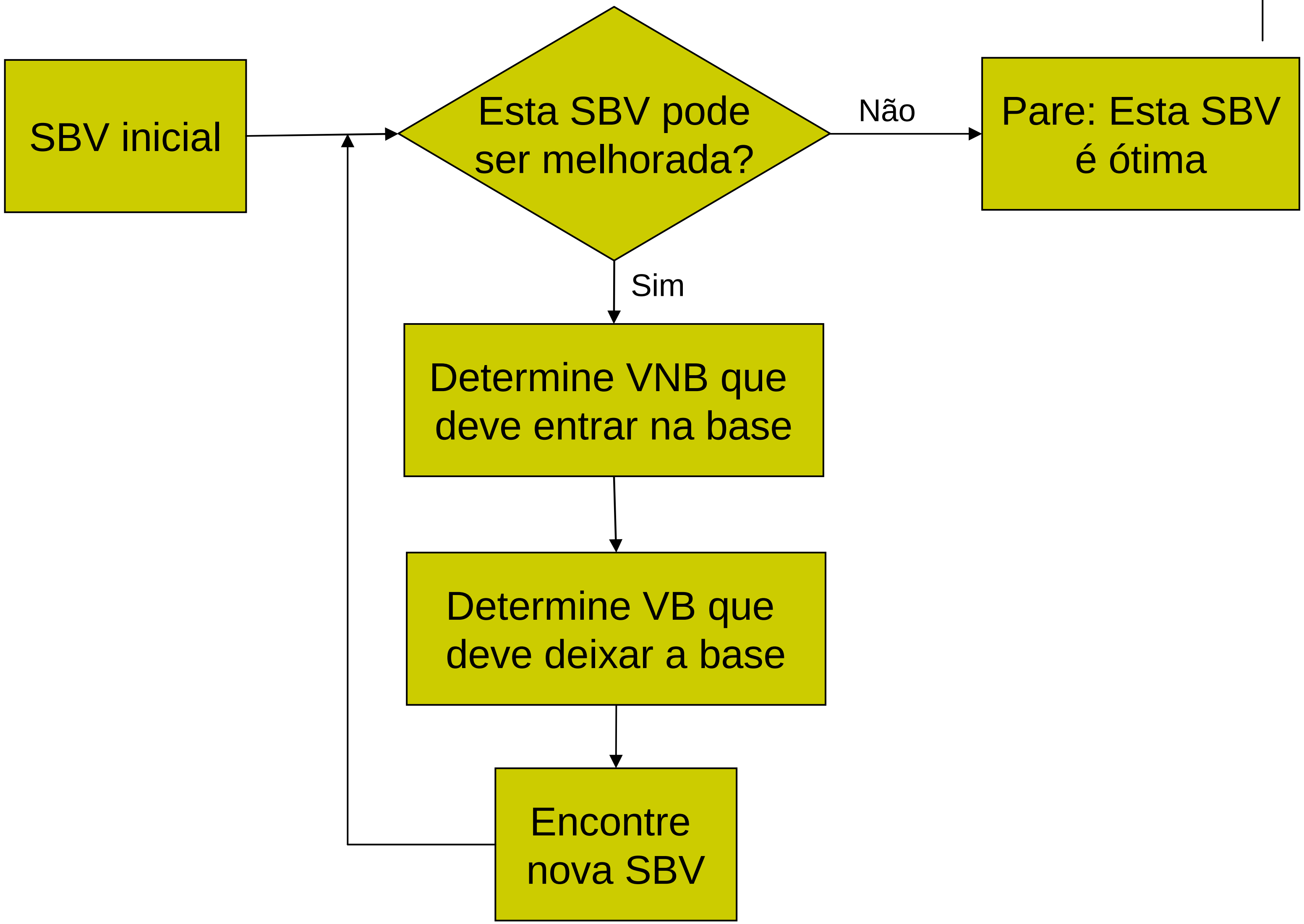
$$Bx^B = b \text{ e } x^R = 0$$

- Solução Básica Viável (SBV): vetor x tal que

$$Bx^B = b; \ x^B \geq 0 \ \text{ e } \ x^R = 0$$

- Solução Básica Viável Degenerada (SBVD): É uma SBV em que existe variável básica nula

Princípio de funcionamento do Algoritmo SIMPLEX



Princípio de funcionamento do Algoritmo SIMPLEX

$$
\begin{array}{lccccc}
\max & x_1 & + & 2x_2 & = & z \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{lcccccccccccc}
\max & x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & = & z \\
 & x_1 & & & + & x_3 & & & & & = & 2 \\
 & & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{A}}
\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{\text{x}}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\text{b}}
$$

Princípio de funcionamento do Algoritmo SIMPLEX

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	1	0	1	0	0	2
x_4	0	1	0	1	0	2
x_5	1	1	0	0	1	3
	1	2	0	0	0	z

PPL na forma canônica: Base é a identidade e coeficientes das VB's na função objetivo são todos nulos.

Princípio de funcionamento do Algoritmo SIMPLEX

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	1	0	1	0	0	2
x_4	0	1	0	1	0	2
x_5	1	1	0	0	1	3
	1	2	0	0	0	z

VB = $\{x_3 = 2, x_4 = 2, x_5 = 3\}$

VNB = $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$

Solução inicial:

$x^{(0)} = (0\ 0\ 2\ 2\ 3)^t$; $z = 0$

Princípio de funcionamento do Algoritmo SIMPLEX

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
(L_1)	x_3	1	0	1	0	0	2
(L_2)	x_4	0		0	1	0	2
(L_3)	x_5	1	1	0	0	1	3
(L_4)		1	2	0	0	0	z

Transformações elementares: $L_3 \leftarrow -L_2 + L_3$ $L_4 \leftarrow -2L_2 + L_4$

Princípio de funcionamento do Algoritmo SIMPLEX

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
(L_1)	x_3	1	0	1	0	0	2
(L_2)	x_2	0	1	0	1	0	2
(L_3)	x_5	1	0	0	-1	1	1
(L_4)		1	0	0	-2	0	z-4

$VB = \{x_3 = 2,\ x_2 = 2,\ x_5 = 1\}$

$VNB = \{x_1 = 0,\ x_4 = 0\}$

Final da Iteração 1:

$x^{(1)} = (0\ 2\ 2\ 0\ 1)^t$; $z = 4$

Princípio de funcionamento do Algoritmo SIMPLEX

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
(L_1)	x_3	1	0	1	0	0	2
(L_2)	x_2	0	1	0	1	0	2
(L_3)	x_5		0	0	-1	1	1
(L_4)		1	0	0	-2	0	z-4

$L_1 \leftarrow -L_3 + L_1$ $\qquad$ $L_4 \leftarrow -L_3 + L_4$

Princípio de funcionamento do Algoritmo SIMPLEX

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
(L_1)	x_3	0	0	1	1	-1	1
(L_2)	x_2	0	1	0	1	0	2
(L_3)	x_1	1	0	0	-1	1	1
(L_4)		0	0	0	-1	-1	z-5

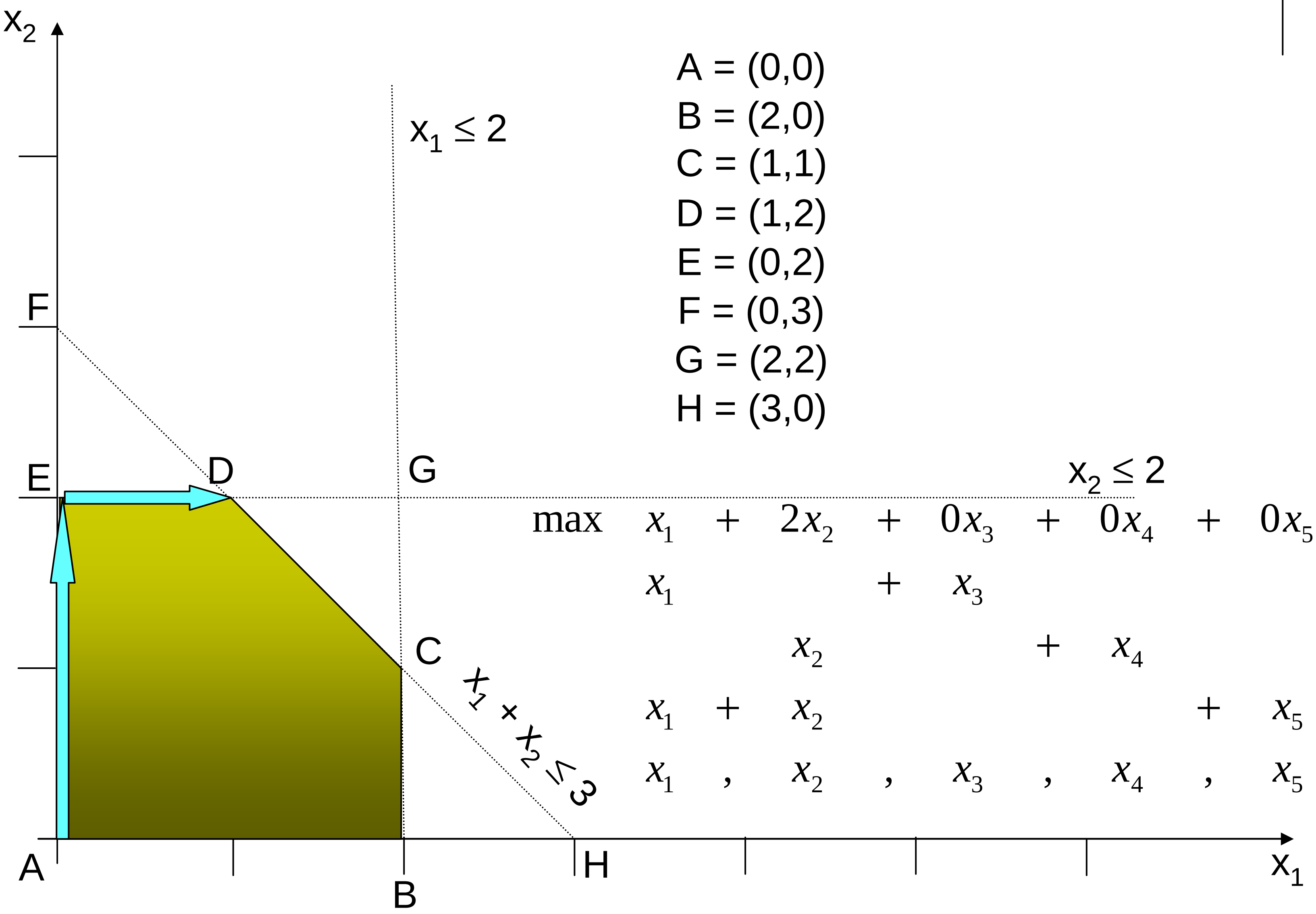
VB = $\{x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1\}$

VNB = $\{x_4 = 0, x_5 = 0\}$

Final da Iteração 2:

$x^{(2)} = (1\ 2\ 1\ 0\ 0)^t$; $z = 5$

Interpretação geométrica



A = (0,0)
B = (2,0)
C = (1,1)
D = (1,2)
E = (0,2)
F = (0,3)
G = (2,2)
H = (3,0)

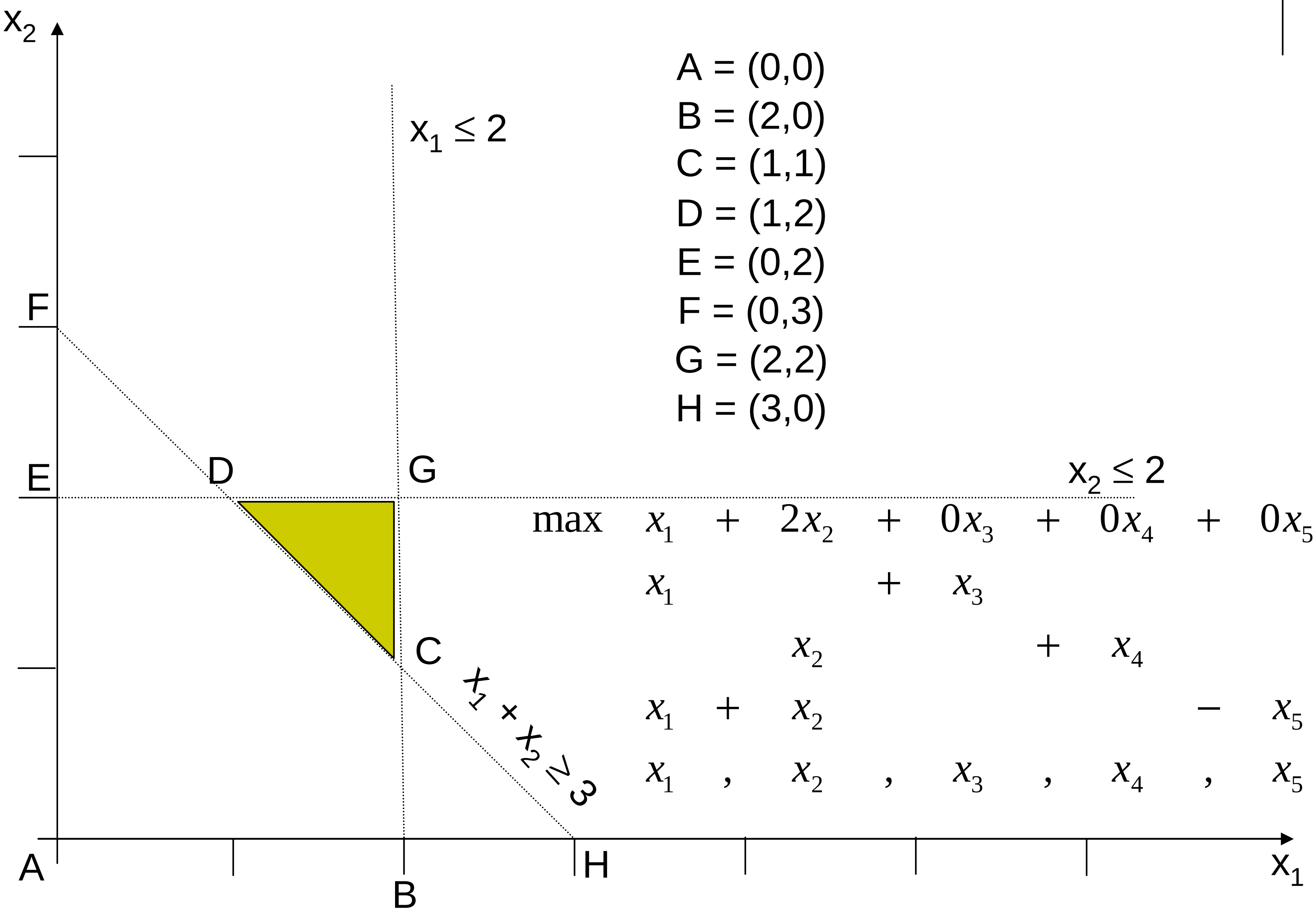
$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
\max & x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & & \\
 & x_1 & & & + & x_3 & & & & & = & 2 \\
 & & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Situação em que a origem não pode ser solução inicial: Exemplo 2

$$
\begin{array}{lccccc}
\max & x_1 & + & 2x_2 & = & z \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & \geq & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{lccccccccccccc}
\max & x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & = & z \\
 & x_1 & & & + & x_3 & & & & & = & 2 \\
 & & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & - & x_5 & = & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{A}}
\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{\text{x}}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\text{b}}
$$

Método das Duas Fases



A = (0,0)
B = (2,0)
C = (1,1)
D = (1,2)
E = (0,2)
F = (0,3)
G = (2,2)
H = (3,0)

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
\max & x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & & \\
 & x_1 & & & + & x_3 & & & & & = & 2 \\
 & & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & - & x_5 & = & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Método das Duas Fases

- Primeira fase (Criar problema auxiliar P'):
  - Introduzir variáveis de folga e variáveis artificiais
  - Variáveis de folga: introduzidas quando há variáveis do tipo ≥ ou ≤
  - Variáveis artificiais: introduzidas quando há restrições do tipo ≥ ou =
  - Criar função objetivo artificial:

$$z^a = \sum_i x_i^a \quad \forall i$$

  - Variáveis básicas iniciais: variáveis de folga associadas às restrições ≤ e variáveis artificiais
  - Objetivo da primeira fase: minimizar a função objetivo artificial
  - Caminhar de SBV em SBV de P' até alcançar SBV do problema original P (situação que ocorre quando todas as variáveis artificiais são nulas).

Método das Duas Fases

- Segunda fase:
  - A partir de uma SBV do problema original P, gerar SBV cada vez melhores até se atingir a solução ótima.
- Aplicando o método das duas fases ao PPL dado, tem-se:

$$
\begin{array}{lccccccccccccccc}
\min & 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & + & 1x_1^a & = & z^a \\
\max & x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & + & 0x_1^a & = & z \\
 & x_1 & & & + & x_3 & & & & & & & = & 2 \\
 & & & x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & - & x_5 & + & x_1^a & = & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_1^a & \geq & 0
\end{array}
$$

Método das Duas Fases

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	
(L_1)	x_3	1	0	1	0	0	0	2
(L_2)	x_4	0	1	0	1	0	0	2
(L_3)	x_1^a	1	1	0	0	-1	1	3
(L_4)		0	0	0	0	0	1	z^a
(L_5)		1	2	0	0	0	0	z

Redução à forma canônica: $L_4 \leftarrow -L_3 + L_4$

Método das Duas Fases

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	
(L_1)	x_3		0	1	0	0	0	2
(L_2)	x_4	0	1	0	1	0	0	2
(L_3)	x_1^a	1	1	0	0	-1	1	3
(L_4)		-1	-1	0	0	1	0	$z^a - 3$
(L_5)		1	2	0	0	0	0	z

$L_3 \leftarrow -L_1 + L_3$ $L_4 \leftarrow L_1 + L_4$ $L_5 \leftarrow -L_1 + L_5$

Método das Duas Fases

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	
(L_1)	x_1	1	0	1	0	0	0	2
(L_2)	x_4	0	1	0	1	0	0	2
(L_3)	x_1^a	0		-1	0	-1	1	1
(L_4)		0	-1	1	0	1	0	$z^a -1$
(L_5)		0	2	-1	0	0	0	$z-2$

$L_2 \leftarrow -L_3 + L_2$ $L_4 \leftarrow L_3 + L_4$ $L_5 \leftarrow -2L_3 + L_5$

Método das Duas Fases

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	
(L_1)	x_1	1	0	1	0	0	0	2
(L_2)	x_4	0	0	1	1	1	-1	1
(L_3)	x_2	0	1	-1	0	-1	1	1
~~(L_4)~~		~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~z^a~~
(L_5)		0	0	1	0	2	-2	z-4

Fim da primeira fase: $z^a = 0$

$x = (2, 1)$; $z = 4$

Método das Duas Fases

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
(L_1)	x_1	1	0	1	0	0	2
(L_2)	x_4	0	0	1	1		1
(L_3)	x_2	0	1	-1	0	-1	1
(L_4)		0	0	1	0	2	z-4

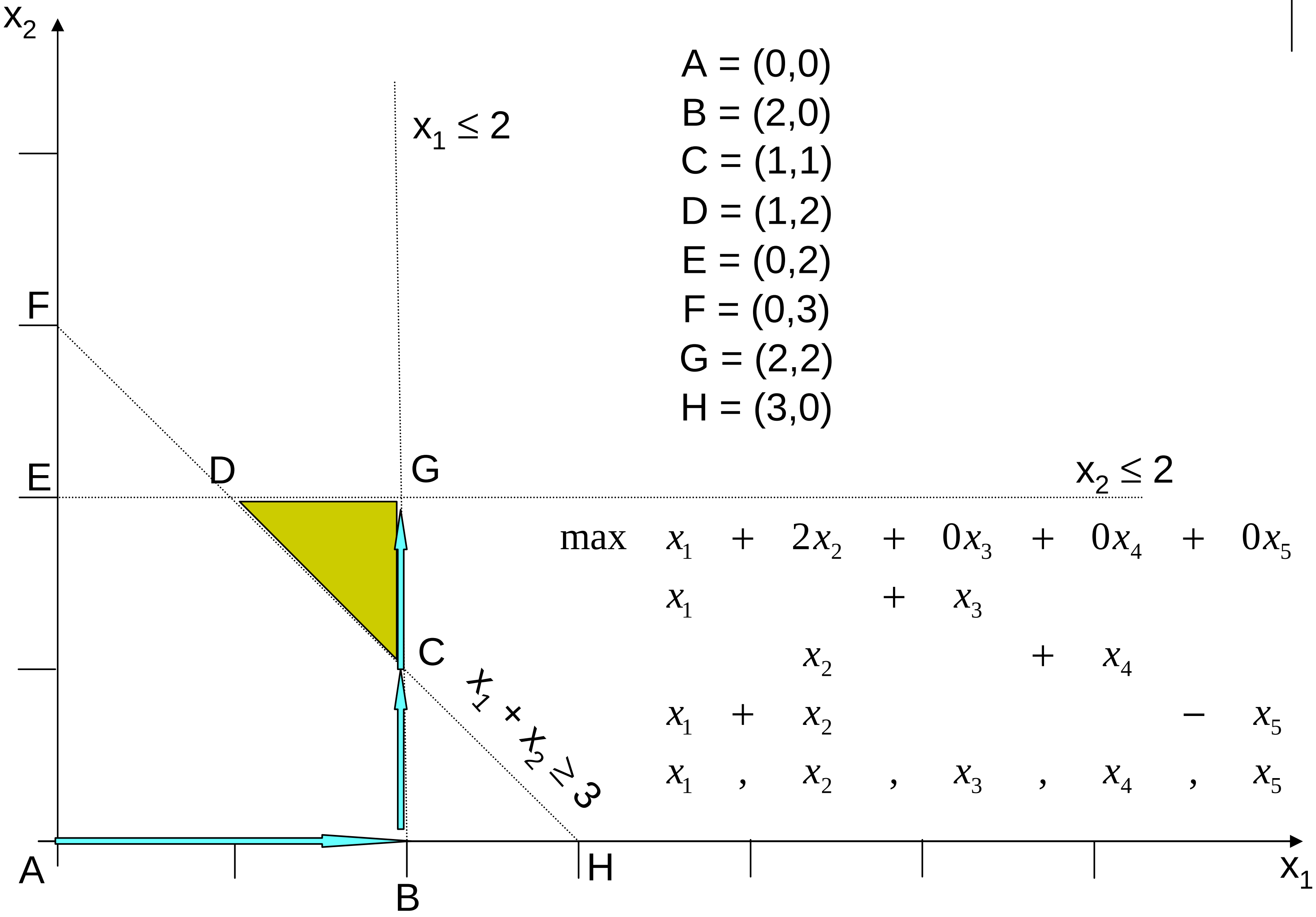
$L_3 \leftarrow L_2 + L_3$ $L_4 \leftarrow -2L_2 + L_4$

Método das Duas Fases

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
(L_1)	x_1	1	0	1	0	0	2
(L_2)	x_5	0	0	1	1	1	1
(L_3)	x_2	0	1	0	1	0	2
(L_4)		0	0	-1	-2	0	z-6

Solução ótima: $x^* = (2,2)$; $z^* = 6$

Método das Duas Fases: Interpretação Geométrica



A = (0,0)
B = (2,0)
C = (1,1)
D = (1,2)
E = (0,2)
F = (0,3)
G = (2,2)
H = (3,0)

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
\max & x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & & \\
 & x_1 & & & + & x_3 & & & & & = & 2 \\
 & & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & - & x_5 & = & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Outro exemplo de aplicação do Método das Duas Fases: Exemplo 3

$$
\begin{array}{lccccc}
\max & x_1 & + & 2x_2 & = & z \\
 & x_1 & & & & 2 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
\max & x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & = & z \\
 & x_1 & & & - & x_3 & & & & & = & 2 \\
 & & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & - & x_5 & = & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{A}}
\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{\text{x}}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\text{b}}
$$

Método das Duas Fases: Exemplo 3

- Introduzindo variáveis artificiais no PPL dado, tem-se:

$$
\begin{array}{lccccccccccccccc}
\min & 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & + & 1x_1^a & + & 1x_2^a & = & z^a \\
\max & x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & + & 0x_1^a & + & 0x_2^a & = & z \\
 & x_1 & & & - & x_3 & & & & & + & x_1^a & & & = & 2 \\
 & & & x_2 & & & + & x_4 & & & & & & & = & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & - & x_5 & & & + & x_2^a & = & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_1^a & , & x_2^a & \geq & 0
\end{array}
$$

Método das Duas Fases

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a	
(L_1)	x_1^a	1	0	-1	0	0	1	0	2
(L_2)	x_4	0	1	0	1	0	0	0	2
(L_3)	x_2^a	1	1	0	0	-1	0	1	3
(L_4)		0	0	0	0	0	1	1	z^a
(L_5)		1	2	0	0	0	0	0	z

Transf. para forma canônica: $L_4 \leftarrow -L_1 - L_3 + L_4$

Método das Duas Fases

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a	
(L_1)	x_1^a	1	0	-1	0	0	1	0	2
(L_2)	x_4	0	1	0	1	0	0	0	2
(L_3)	x_2^a	1	1	0	0	-1	0	1	3
(L_4)		-2	-1	1	0	1	0	0	$z^a - 5$
(L_5)		1	2	0	0	0	0	0	z

$L_3 \leftarrow -L_1 + L_3$ $L_4 \leftarrow 2L_1 + L_4$ $L_5 \leftarrow -L_1 + L_5$

Método das Duas Fases

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a	
(L_1)	x_1	1	0	-1	0	0	1	0	2
(L_2)	x_4	0	1	0	1	0	0	0	2
(L_3)	x_2^a	0		1	0	-1	-1	1	1
(L_4)		0	-1	-1	0	1	2	0	z^a -1
(L_5)		0	2	1	0	0	-1	0	z-2

$L_2 \leftarrow -L_3 + L_2$ $L_4 \leftarrow L_3 + L_4$ $L_5 \leftarrow -2L_3 + L_5$

Método das Duas Fases

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a	
(L_1)	x_1	1	0	-1	0	0	1	0	2
(L_2)	x_4	0	0	-1	1	1	1	-1	1
(L_3)	x_2	0	1	1	0	-1	-1	1	1
(L_4)		0	0	0	0	0	1	1	z^a
(L_5)		0	0	-1	0	2	1	-2	z-4

Fim da primeira fase: $z^a = 0$

$x = (2, 1); z = 4$

Método das Duas Fases

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
(L_1)	x_1	1	0	-1	0	0	2
(L_2)	x_4	0	0	-1	1		1
(L_3)	x_2	0	1	1	0	-1	1
(L_4)		0	0	-1	0	2	z-4

$L_3 \leftarrow L_2 + L_3$ $\qquad$ $L_4 \leftarrow -2L_2 + L_4$

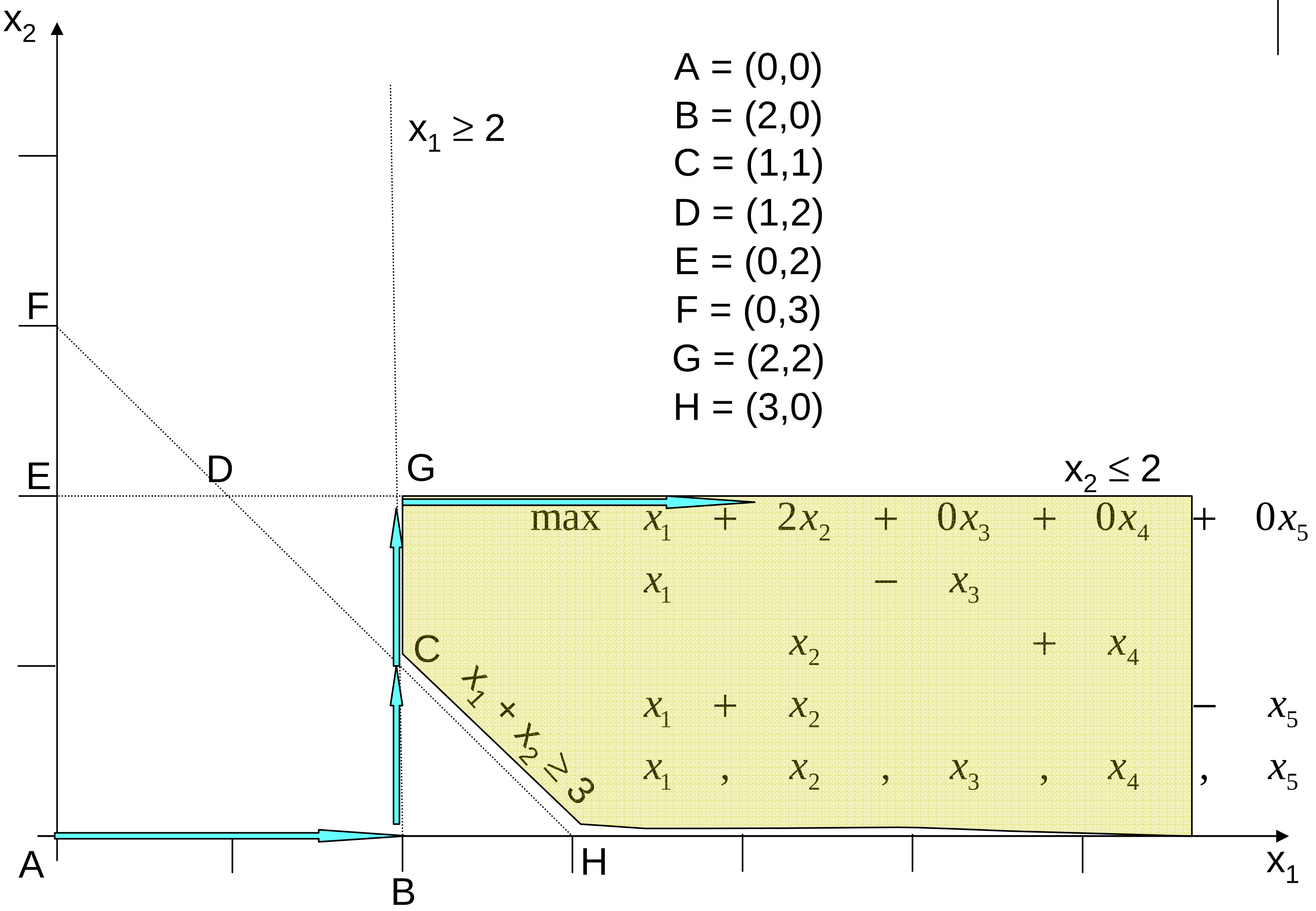
Método das Duas Fases

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
(L_1)	x_1	1	0	-1	0	0	2
(L_2)	x_5	0	0	-1	1	1	1
(L_3)	x_2	0	1	0	1	0	2
(L_4)		0	0	1	-2	0	z-6

x_3 pode entrar na base melhorando o valor de z indefinidamente. Assim, não há solução ótima.

Método das Duas Fases:

Interpretação Geométrica do Exemplo 3



A = (0,0)
B = (2,0)
C = (1,1)
D = (1,2)
E = (0,2)
F = (0,3)
G = (2,2)
H = (3,0)

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max & x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & & \\
 & x_1 & & & - & x_3 & & & & & = & 2 \\
 & & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & - & x_5 & = & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Método das Duas Fases: Exemplo 4

$$
\begin{array}{lccccc}
\min & x_1 & + & x_2 & = & z \\
 & x_1 & & & & 2 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{lccccccccccc}
\min & x_1 & + & x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & = & z \\
 & x_1 & & & - & x_3 & & & & & = & 2 \\
 & & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & - & x_5 & = & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{A}}
\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{\text{x}}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\text{b}}
$$

Método das Duas Fases: Exemplo 4

- Introduzindo variáveis artificiais no PPL dado, tem-se:

$$
\begin{array}{lccccccccccccccccc}
\min & 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & + & 1x_1^a & + & 1x_2^a & = & z^a \\
\min & x_1 & + & x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & + & 0x_1^a & + & 0x_2^a & = & z \\
 & x_1 & & & - & x_3 & & & & & + & x_1^a & & & = & 2 \\
 & & & x_2 & & & + & x_4 & & & & & & & = & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & - & x_5 & & & + & x_2^a & = & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_1^a & , & x_2^a & \geq & 0
\end{array}
$$

Método das Duas Fases

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a	
(L_1)	x_1^a	1	0	-1	0	0	1	0	2
(L_2)	x_4	0	1	0	1	0	0	0	2
(L_3)	x_2^a	1	1	0	0	-1	0	1	3
(L_4)		0	0	0	0	0	1	1	z^a
(L_5)		1	1	0	0	0	0	0	z

Transf. para forma canônica: $L_4 \leftarrow -L_1 - L_3 + L_4$

Método das Duas Fases

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a	
(L_1)	x_1^a		0	-1	0	0	1	0	2
(L_2)	x_4	0	1	0	1	0	0	0	2
(L_3)	x_2^a	1	1	0	0	-1	0	1	3
(L_4)		-2	-1	1	0	1	0	0	$z^a -5$
(L_5)		1	1	0	0	0	0	0	z

$L_3 \leftarrow -L_1 + L_3$ $L_4 \leftarrow 2L_1 + L_4$ $L_5 \leftarrow -L_1 + L_5$

Método das Duas Fases

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a	
(L_1)	x_1	1	0	-1	0	0	1	0	2
(L_2)	x_4	0	1	0	1	0	0	0	2
(L_3)	x_2^a	0		1	0	-1	-1	1	1
(L_4)		0	-1	-1	0	1	2	0	$z^a -1$
(L_5)		0	1	1	0	0	-1	0	z-2

$L_2 \leftarrow -L_3 + L_2$ $L_4 \leftarrow L_3 + L_4$ $L_5 \leftarrow -L_3 + L_5$

Método das Duas Fases

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a	
(L_1)	x_1	1	0	-1	0	0	1	0	2
(L_2)	x_4	0	0	-1	1	1	1	-1	1
(L_3)	x_2	0	1	1	0	-1	-1	1	1
(L_4)		0	0	0	0	0	1	1	z^a
(L_5)		0	0	0	0	1	1	-1	z-3

Fim da primeira fase: $z^a = 0$ $x = (2, 1)$; $z = 3$

Método das Duas Fases

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
(L_1)	x_1	1	0	-1	0	0	2
(L_2)	x_4	0	0	-1	1	1	1
(L_3)	x_2	0	1		0	-1	1
(L_4)		0	0	0	0	1	z-3

Solução ótima: $z = 3$; $x_1 = 2$; $x_2 = 1$; x_3 é VNB nula

$L_1 \leftarrow L_3 + L_1$ $\quad$ $L_2 \leftarrow L_3 + L_2$

Método das Duas Fases

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
(L_1)	x_1	1	1	0	0	-1	3
(L_2)	x_4	0	1	0	1	0	2
(L_3)	x_3	0	1	1	0	-1	1
(L_4)		0	0	0	0	1	z-3

Outra solução ótima: $z = 3$; $x_1 = 3$; $x_2 = 0$

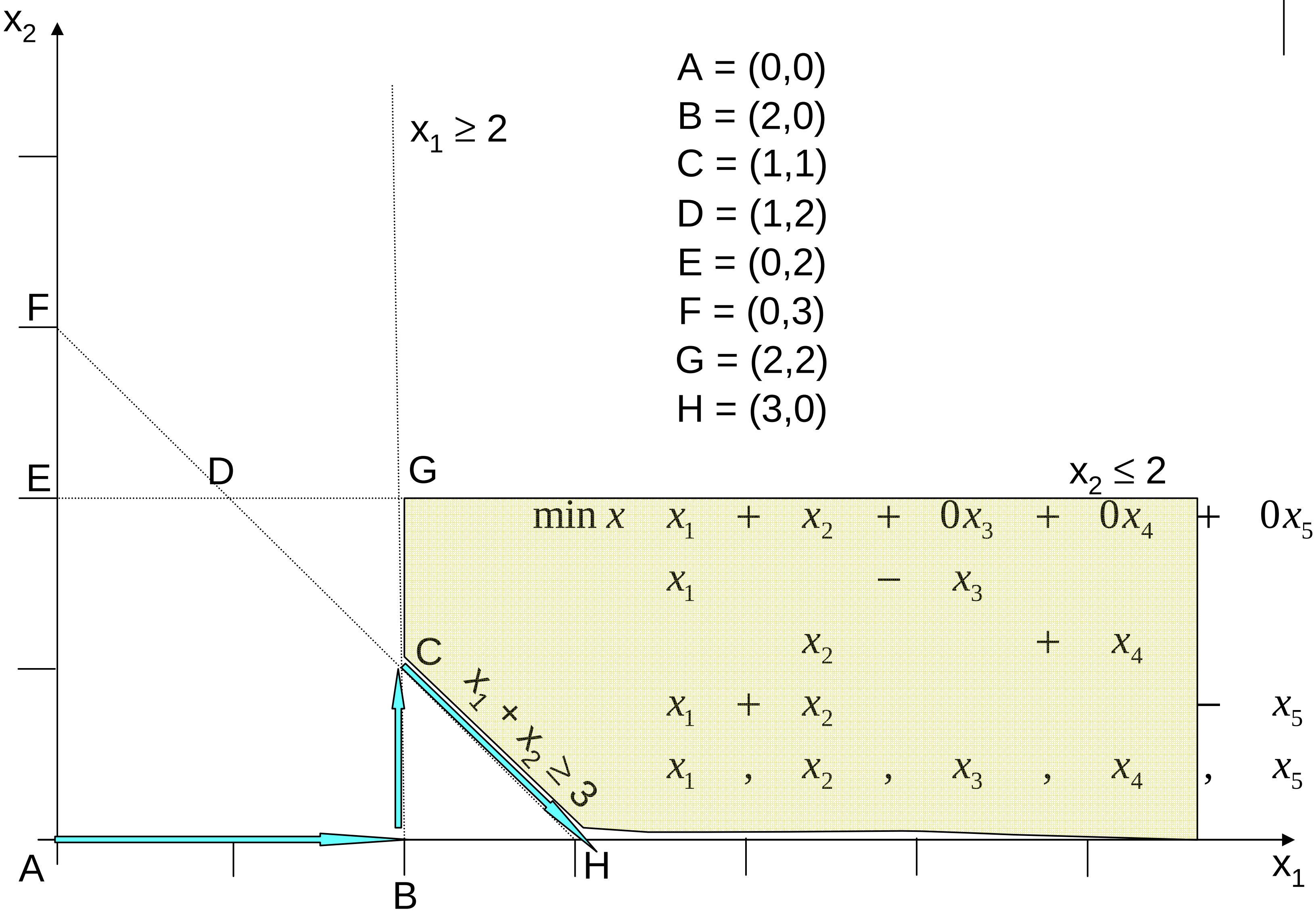
Método das Duas Fases

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
(L_1)	x_1	1	1	0	0	-1	3
(L_2)	x_4	0	1	0	1	0	2
(L_3)	x_3	0	1	1	0	-1	1
(L_4)		0	0	0	0	1	z-3

Assim, todos os pontos da aresta que liga os pontos (2, 1) e (3, 0) são ótimos. Isto é, todos os pontos da forma:

$$x^* = (x_1 , x_2) = \alpha \times (2, 1) + (1 - \alpha) \times (3, 0), \text{ sendo } \alpha \in [0,1]$$

Método das Duas Fases:
Interpretação Geométrica do Exemplo 4



$$
\begin{array}{lcccccccccc}
\min x & x_1 & + & x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & \\
 & x_1 & & & - & x_3 & & & & & = 2 \\
 & & & x_2 & & & + & x_4 & & & = 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & - & x_5 & = 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq 0
\end{array}
$$