Introdução à Otimização: modelagem

Prof. Marcone J. F. Souza
Prof. Túlio A. M. Toffolo

marcone.freitas@yahoo.com.br

Departamento de Computação
Universidade Federal de Ouro Preto

- **Prof. Marcone Jamilson Freitas Souza**
  Departamento de Computação
  Universidade Federal de Ouro Preto
  www.decom.ufop.br/prof/marcone
  marcone.freitas@yahoo.com.br

- **Prof. Túlio Ângelo Machado Toffolo**
  Departamento de Computação
  Universidade Federal de Ouro Preto
  www.decom.ufop.br/toffolo
  tulio@toffolo.com.br

Roteiro

- Problema de Transporte
- Problema de Alocação de Ordens de Serviço
- Problema de Dimensionamento de Lotes
- Problema das p-medianas não Capacitado
- Problema das p-medianas Capacitado
- Problema dos p-centros
- Problema de Alocação Dinâmica de Caminhões

PROBLEMA DE TRANSPORTE

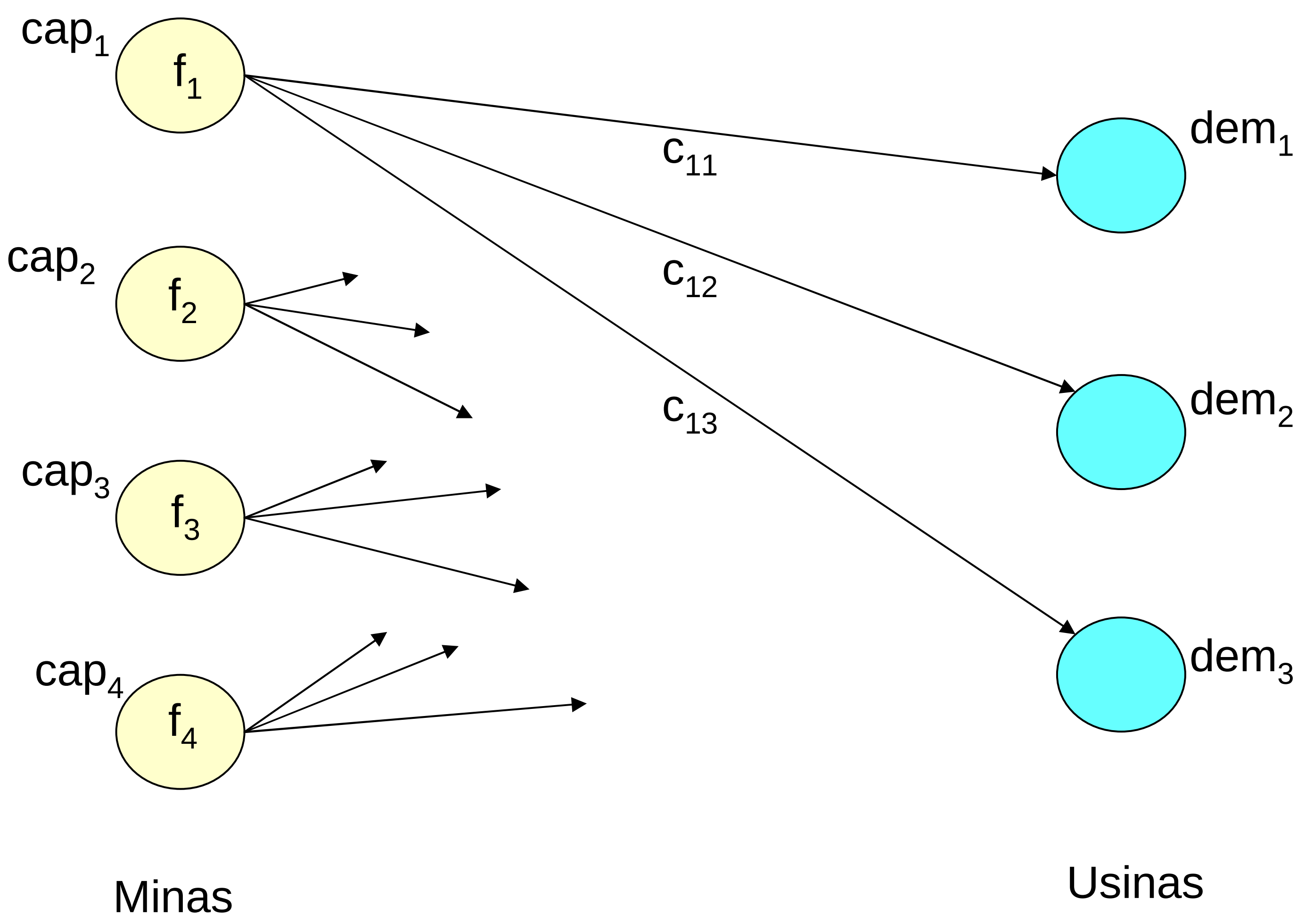
Problema de Transporte

- Há um conjunto de minas produtoras de minério
- Há um conjunto de usinas que processam os minérios provenientes das minas
- Há um custo de transporte de minério de uma mina para uma usina
- Cada mina tem uma capacidade de produção mensal
- Cada usina tem uma demanda mensal
- Cada mina tem um custo fixo se for usada
- Determinar a estratégia ótima de transporte

Problema de Transporte

Mina	Usinas			Cap (t/mês)	Custo ($)
	1	2	3		
1	10	8	13	11500	50000
2	7	9	14	14500	40000
3	6,5	10,8	12,4	13000	30000
4	8,5	12,7	9,8	12300	25500
Demanda (t/mês)	10000	15400	13300	-	-

Problema de Transporte



Problema de Transporte

Dados de entrada:

- Minas = Conjunto de minas
- Usinas = Conjunto de usinas
- cap_i = capacidade de produção, em toneladas/mês, da mina i
- dem_j = quantidade de minério demandado pela usina j, em ton/mês
- f_i = custo fixo de uso da mina i, em $
- c_{ij} = custo de transporte de minério proveniente da mina i para abastecer a usina j, em $/tonelada/mês

Problema de Transporte

Variáveis de decisão:

- x_{ij} = Quantidade de minério, em toneladas/mês, a ser transportado da mina *i* para abastecer a usina *j*
- y_i = 1 se a mina *i* for usada e 0, caso contrário

Problema de Transporte

- Como oferta (minas) > demanda (usinas):
  - <u>**Toda a demanda será atendida**</u>

- Função objetivo: minimizar o custo de transporte mais o custo fixo pelo uso das minas usadas

$$\min \sum_{i \in Minas} \sum_{j \in \text{Usinas}} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in Minas} f_i y_i$$

Problema de Transporte

- A capacidade de produção das minas deve ser respeitada

$$\sum_{j \in \text{Usinas}} x_{ij} \leq cap_i \quad \forall i \in Minas$$

- Toda a demanda é atendida (oferta > demanda)

$$\sum_{i \in Minas} x_{ij} = dem_j \quad \forall j \in \text{Usinas}$$

Problema de Transporte

- Uma mina só pode ser usada se houver produção

$$y_i \geq \frac{\sum_{j \in \text{Usinas}} x_{ij}}{cap_i} \quad \forall i \in Minas$$

- Não negatividade e integralidade

$$y_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in Minas$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in Minas, \forall j \in \text{Usinas}$$

Problema de Transporte

- Relativamente ao problema anterior, supor que <u>se houver transporte</u> de minério de uma mina *i* para uma usina *j*, então a quantidade $\boldsymbol{x_{ij}}$ transportada não pode ser inferior a ***transpmin***.

$$z_{ij} \geq \frac{x_{ij}}{cap_i} \quad \forall i \in Minas, \forall j \in Usinas$$

$$x_{ij} \geq transpmin \cdot z_{ij} \quad \forall i \in Minas, \forall j \in Usinas$$

$$z_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \in Minas, \forall j \in Usinas$$

Problema de Transporte

- Se oferta (minas) < demanda (usinas):

$$\min \sum_{i \in Minas} \sum_{j \in \text{Usinas}} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in Minas} f_i$$

Todas as minas serão utilizadas

$$\sum_{j \in \text{Usinas}} x_{ij} = cap_i \quad \forall i \in Minas$$

Toda a produção é consumida

$$\sum_{i \in Minas} x_{ij} \leq dem_j \quad \forall j \in \text{Usinas}$$

Nem toda a demanda é atendida

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in Minas, \forall j \in \text{Usinas}$$

ALOCAÇÃO DE ORDENS DE SERVIÇO

Alocação de Ordens de Serviço

- Deseja-se executar um conjunto de ordens de serviço (*Servicos*) em um conjunto de dias (*Dias*).
- Cada ordem de serviço $i \in$ *Servicos* demanda d_i horas de serviço e a ela está associada uma prioridade $p_i \in [1, 5]$, sendo que quanto maior o valor de p_i, maior a prioridade.
- Conhecendo-se a quantidade cap_j disponível de horas de serviço por dia, determinar a <u>alocação diária de ordens de serviço cujo somatório das prioridades seja máxima</u>.

Alocação de Ordens de Serviço

Serviços	Duração	Prioridade			Dias	
s1	2	4		**Seg**	**Ter**	**Qua**
s2	3	3		16	15	16
s3	5	1				
s4	4	4				
s5	6	1				
s6	3	2				
s7	10	4				
s8	8	3				
s9	7	4				
s10	4	1				

Alocação de Ordens de Serviço

Dados de entrada:

- d_i = duração do serviço i
- p_i = prioridade do serviço i
- cap_j = número de horas de serviço disponíveis no dia j

Variáveis:

- $x_{ij} = 1$ se o serviço j for executado no dia i ou zero caso contrário

Alocação de Ordens de Serviço

$$\max \sum_{i \in Servicos} \sum_{j \in Dias} p_i x_{ij}$$

$$\sum_{j \in Dias} x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in Servicos$$

Um serviço *i*, se executado, deve ser realizado em um único dia;

$$\sum_{i \in Serviços} d_i x_{ij} \leq cap_j \quad \forall j \in Dias$$

Em um dado dia *j* os servicos executados têm que respeitar a disponibilidade de horas

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \in Servicos, \quad \forall j \in Dias$$

As variáveis envolvidas são binárias (0 ou 1)

Alocação de Ordens de Serviço

- Reescreva a função objetivo para que as ordens de serviço de maior prioridade sejam realizadas nos dias iniciais do horizonte de planejamento.

PROBLEMA DE DIMENSIONAMENTO DE LOTES

Dimensionamento de Lotes

- Empresas precisam produzir diversos tipos de produtos solicitados por diferentes clientes
- Produtos devem estar prontos em datas previamente agendadas
- A capacidade de produção é limitada (máquinas, mão-de-obra, etc)
- Necessário se faz planejar a produção
- Decidir **o quê produzir**, **quanto produzir**, isto é, dimensionar os lotes de produção, e **quando produzir** (em cada período do horizonte de planejamento)

Dimensionamento de Lotes

- A necessidade de antecipação da fabricação de produtos (estocados de um período para outro) acarreta custos de estocagem e algumas dificuldades operacionais
- No planejamento da produção deseja-se determinar o tamanho dos lotes de produção para atender a demanda na data solicitada, de modo que a soma dos custos de produção e estocagem seja <u>mínima</u>.

Dimensionamento de Lotes

- Imagine o atendimento a uma encomenda para entregar um produto ao longo de um período de tempo. São dados, para cada mês:
  - Demanda
  - Custo de produção
  - Custo de estocagem
- Considere que o estoque inicial seja de 3 unidades
- Elabore um modelo de PLI que minimize o custo total de produção e estocagem.

Dimensionamento de Lotes

Mês	Cap. Produção (unid)	Demanda (unid.)	Custo de estocagem (R$)	Custo de prod. (R$)
1	7	10	3	5
2	7	2	2	3
3	7	9	3	7
4	7	6	2	4
5	7	8	3	5
6	7	7	2	9

Dimensionamento de Lotes

Dados de entrada:

- meses = conjunto dos meses de produção
- $cprod_t$ = custo de produção no mês t
- $cest_t$ = custo de estoque no mês t
- $demanda_t$ = demanda no mês t
- cap_t = capacidade de produção no mês t
- estinicial = estoque inicial

Dimensionamento de Lotes

Variáveis de decisão:

- x_t = quantidade do produto a ser produzida no mês t
- e_t = quantidade do produto a ser estocada no mês t

Dimensionamento de Lotes

- Função objetivo: minimizar os custos de produção e de estocagem

$$\min \sum_{t \in Meses} \left(cprod_t x_t + cest_t e_t \right)$$

Dimensionamento de Lotes

- Conservação de fluxo no final do **mês 1**:

$$e_1 = estinicial + x_1 - demanda_1$$

- Conservação de fluxo em ao final de **cada mês *t* > 1**:

$$e_t = e_{t-1} + x_t - demanda_t \; \forall t \in Meses \mid t > 1$$

Dimensionamento de Lotes

- Respeito à capacidade de produção em cada mês:

$$x_t \le cap_t \ \forall t \in Meses$$

Dimensionamento de Lotes

$$\min \sum_{t \in Meses} (cprod_t\, x_t + cest_t\, e_t)$$

$$e_1 = estinicial + x_1 - demanda_1$$

Conservação de fluxo no final do mês 1:

$$e_t = e_{t-1} + x_t - demanda_t \quad \forall t \in Meses \mid t > 1$$

Conservação de fluxo em ao final de cada mês t > 1:

$$x_t \leq cap_t \quad \forall t \in Meses$$

Capacidade de produção

$$e_t \geq 0,\; x_t \geq 0 \quad \forall t \in Meses$$

Não-negatividade

DIMENSIONAMENTO DE LOTES COM VÁRIOS PRODUTOS

Dimensionamento de Lotes (n produtos)

- Considere uma empresa que fabrica ***n*** produtos e deseja programar sua produção nos próximos *T* períodos de tempo.
- É conhecida a demanda de cada produto em cada período do horizonte de planejamento.
- Em cada período, os recursos necessários para a produção são limitados e renováveis, isto é, uma quantidade de recursos está sempre disponível (mão-de-obra, horas-de-máquina, etc.).
- Há a possibilidade de estocagem de produtos de um período para outro

Dimensionamento de Lotes (n produtos)

<u>Dados de entrada:</u>

- $demanda_{it}$: demanda do item i no período t
- cap_t: disponibilidade de recursos no período t
- $consumo_i$: quantidade de recursos necessários para a produção de uma unidade do item i
- $cprod_{it}$: custo de produzir uma unidade de i no período t
- $cest_{it}$: custo de estocar uma unidade de i no período t

Estoques iniciais $\boldsymbol{e_{i0}}$ são dados

Dimensionamento de Lotes (n produtos)

<u>Variáveis de decisão:</u>

- x_{it}: número de itens do tipo i produzidos no período t
- e_{it}: número de itens do tipo i em estoque no final do período t

Dimensionamento de Lotes

$$\min \sum_{i \in Itens} \sum_{t \in Meses} (cprod_{it}\, x_{it} + cest_{it}\, e_{it})$$

$$e_{it} = e_{i,t-1} + x_{it} - demanda_{it}$$
$$\forall i \in Itens, \forall t \in Meses \mid t > 1$$

Conservação de fluxo em ao final de cada mês t > 1:

$$\sum_{i=1}^{n} consumo_i\, x_{it} \leq cap_t \quad \forall t \in Meses$$

Restrições de capacidade

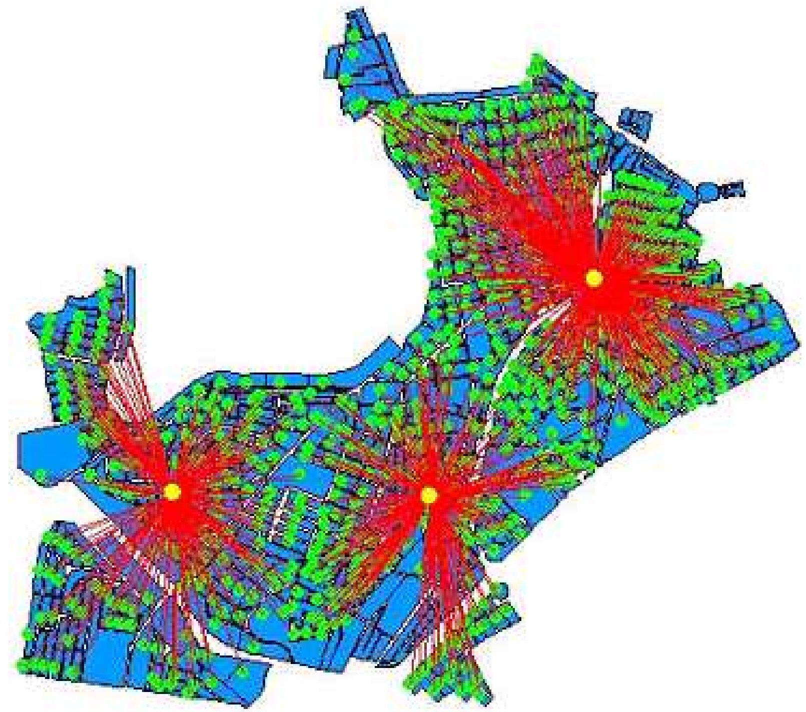
$$e_{it} \in \mathbb{Z}^+, \; x_{it} \in \mathbb{Z}^+$$
$$\forall i \in Itens, \forall t \in Meses$$

Integralidade das variáveis

PROBLEMA DAS P-MEDIANAS

Problema das p-medianas

- Problema de localização de facilidades: dado um número n de clientes (pontos de demanda), encontrar os p pontos de suprimento que minimizem o custo de cada ponto de demanda a seu respectivo ponto de suprimento.
- Aplicações na localização de fábricas, usinas, centros de distribuição, centros de saúde, etc.



Problema das p-medianas

Dados de entrada:

- Locais: Conjunto de locais
- Facilidades: Conjunto de possíveis locais para instalação de facilidades
- p = número de facilidades a serem instaladas
- c_{ij} = custo de atendimento de um local j por uma facilidade instalada em i
- $demanda_j$ = demanda do local j
- f_i = custo de instalação da facilidade no local i

Problema das p-medianas capacitado

Variáveis de decisão:

- x_{ij} = 1 se o local j for atendido pela facilidade instalada em i e zero caso contrário.
- y_i = 1 se a facilidade for instalada em i e zero caso contrário.

Problema das p-medianas capacitado

- Função objetivo:

$$\min \sum_{i \in Facilidades} \sum_{j \in Locais} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in Facilidades} f_i y_i$$

Problema das p-medianas

- Cada local é atendido por uma única facilidade:

$$\sum_{i \in Facilidades} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in Locais$$

- Devem ser instaladas p facilidades:

$$\sum_{i \in Facilidades} y_i = p$$

Problema das p-medianas

- Um local só pode ser atendido por uma facilidade i se ela tiver sido instalada:

$$x_{ij} \leq y_i \quad \forall i \in Facilidades, \forall j \in Locais$$

- As variáveis de decisão (x_{ij} e y_i) devem ser binárias:

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \in Facilidades, \forall j \in Locais$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in Facilidades$$

Problema das p-medianas

$$\min \sum_{i \in Facilidades} \sum_{j \in Locais} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in Facilidades} f_i y_i$$

$$\sum_{i \in Facilidades} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in Locais$$

$$\sum_{i \in Facilidades} y_i = p$$

$$x_{ij} \leq y_i \quad \forall i \in Facilidades, \forall j \in Locais$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \in Facilidades, \forall j \in Locais$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in Facilidades$$

PROBLEMA DAS P-MEDIANAS CAPACITADO

Problema das p-medianas capacitado

Dados de Entrada Adicionais:

- cap_i = capacidade (recursos) da facilidade i
- $demanda_j$ = demanda de recursos do local j

Função objetivo: (idêntica ao problema não capacitado)

$$\min \sum_{i \in Facilidades} \sum_{j \in Locais} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in Facilidades} f_i y_i$$

Problema das p-medianas capacitado

- A demanda de um local j só pode ser atendida por uma facilidade i que comporte este atendimento:

$$\sum_{j \in Locais} demanda_j \, x_{ij} \leq cap_i \, y_i \quad \forall i \in Facilidades$$

Problema dos p-centros

$$\min \sum_{i \in Facilidades} \sum_{j \in Locais} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in Facilidades} f_i y_i$$

$$\boxed{\sum_{j \in Locais} demanda_j x_{ij} \le cap_i y_i \quad \forall i \in Facilidades}$$

$$\sum_{i \in Facilidades} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in Locais \qquad \sum_{i \in Facilidades} y_i = p$$

$$x_{ij} \le y_i \quad \forall i \in Facilidades, \forall j \in Locais$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \in Facilidades, \forall j \in Locais$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in Facilidades$$

PROBLEMA DOS P-CENTROS

Problema dos p-centros

- Objetivo é o de minimizar a distância máxima entre um local *j* e a facilidade *i* a ele designada.
- Minimizar *r*, onde *r* é a maior distância entre uma facilidade e seu local de atendimento:

$$d_{ij} x_{ij} \leq r \quad \forall i \in Facilidades,\ \forall j \in Locais$$

Problema dos p-centros

$$\boxed{\min \ r}$$

$$\boxed{d_{ij} x_{ij} \leq r \ \ \forall i \in Facilidades, \ \forall j \in Locais}$$

$$\sum_{i \in Facilidades} x_{ij} = 1 \ \ \forall j \in Locais \qquad \sum_{i \in Facilidades} y_i = p$$

$$x_{ij} \leq y_i \ \ \forall i \in Facilidades, \forall j \in Locais$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \ \ \forall i \in Facilidades, \forall j \in Locais$$

$$y_i \in \{0,1\} \ \ \forall i \in Facilidades$$

Problema dos p-centros

$$\min \ r$$

$$\sum_{i \in Facilidades} d_{ij} x_{ij} \leq r \ \forall j \in Locais$$

$$\sum_{i \in Facilidades} x_{ij} = 1 \ \forall j \in Locais$$

$$\sum_{i \in Facilidades} y_i = p$$

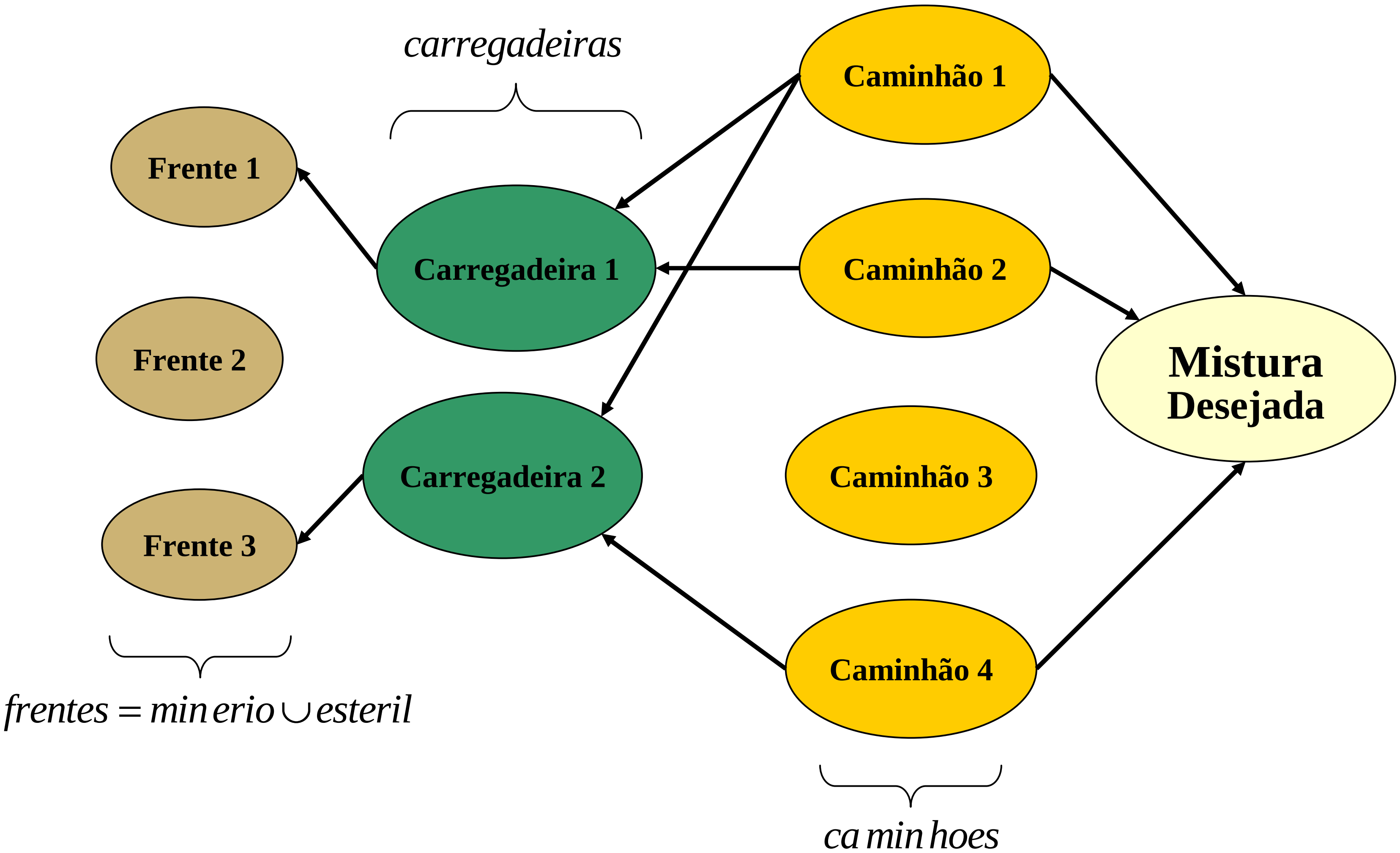
$$x_{ij} \leq y_i \ \ \forall i \in Facilidades, \forall j \in Locais$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \ \ \forall i \in Facilidades, \forall j \in Locais$$

$$y_i \in \{0,1\} \ \ \forall i \in Facilidades$$

PROBLEMA DA ALOCAÇÃO DINÂMICA DE CAMINHÕES

Alocação Dinâmica de Caminhões



Alocação Dinâmica de Caminhões

Dados de entrada (1):

- t_{ij}: Teor do parâmetro j na frente i (%);
- tl_j: Teor mínimo admissível para o parâmetro j (%);
- tu_j: Teor máximo admissível para o parâmetro j (%);
- tr_j: Teor recomendado para o parâmetro j (%);
- wnm_j: Peso por desvio negativo para o parâmetro j;
- wpm_j: Peso por desvio positivo para o parâmetro j;
- wpp: Peso por desvio positivo de produção;
- wnp: Peso por desvio negativo de produção;

Alocação Dinâmica de Caminhões

Dados de entrada (2):

- Qu_i: Massa disponível na frente i (t);
- $tempCiclo_i$: Tempo de ciclo de caminhões para a frente i;
- $estMin_i$: Se a frente i é de minério (1) ou estéril (0);
- Cu_k: Produção máxima da carregadeira k (t/h);
- Cl_k: Produção mínima da carregadeira k (t/h);
- $capCam_l$: Capacidade do caminhão l (t);
- $comp_{lk}$: Se o caminhão l é compatível (1) ou não (0) com a carregadeira k;
- rem: Relação estéril/minério.

Alocação Dinâmica de Caminhões

Variáveis de decisão:

- x_i: Ritmo de lavra para a frente i (t/h);
- y_{ik}: 1 se a carregadeira k opera na frente i e 0 c.c.;
- $usou_l$ = 1 se o caminhão l for usado e 0 caso contrário;
- n_{li}: Viagens que o caminhão l realiza à frente i;
- dnm_j e dpm_j: Desvios negativo e positivo da meta do parâmetro j (t/h);
- dnu_l e dpu_l: Desvios negativo e positivo de utilização do caminhão l;
- dnp e dpp: Desvios negativo e positivo de produção;

Alocação Dinâmica de Caminhões

- Função objetivo

$$\min \sum_{j \in Parametros} \left(wnm_j dnm_j + wpm_j dpm_j \right) +$$
$$wnp \cdot dnp + wnp \cdot dpp + \sum_{l \in Caminhoes} CapCam_l usou_l$$

Problema da Mistura expandido

- Admite-se que haja falta (*dnm_j*) ou excesso (*dpm_j*) do parâmetro *j* na mistura em relação à meta de qualidade

$$\sum_{\substack{i \in Frentes \\ |estMin_i = 1}} (t_{ij} - tr_j) x_i + dnm_j - dpm_j = 0 \quad \forall j \in Parametros$$

- Os desvios *dnm_j* e *dpm_j* devem ser penalizados na função objetivo.

Alocação Dinâmica de Caminhões

- Atendimento aos limites de especificação (obrigatório):

$$\sum_{\substack{i \in Frentes \\ | estMin_i = 1}} \left(t_{ij} - tu_j\right) x_i \le 0 \quad \forall j \in Parametros$$

$$\sum_{\substack{i \in Frentes \\ | estMin_i = 1}} \left(t_{ij} - tl_j\right) x_i \ge 0 \quad \forall j \in Parametros$$

Alocação Dinâmica de Caminhões

- A produção deve respeitar o máximo admitido:

$$\sum_{\substack{i \in Frentes \\ | estMin_i = 1}} x_i \leq pu$$

- A produção deve respeitar o mínimo admitido:

$$\sum_{\substack{i \in Frentes \\ | estMin_i = 1}} x_i \geq pl$$

Alocação Dinâmica de Caminhões

- A meta de produção deve ser buscada sempre que possível.

$$\sum_{\substack{i \in Frentes \\ | estMin_i = 1}} x_i + dnp - dpp = pr$$

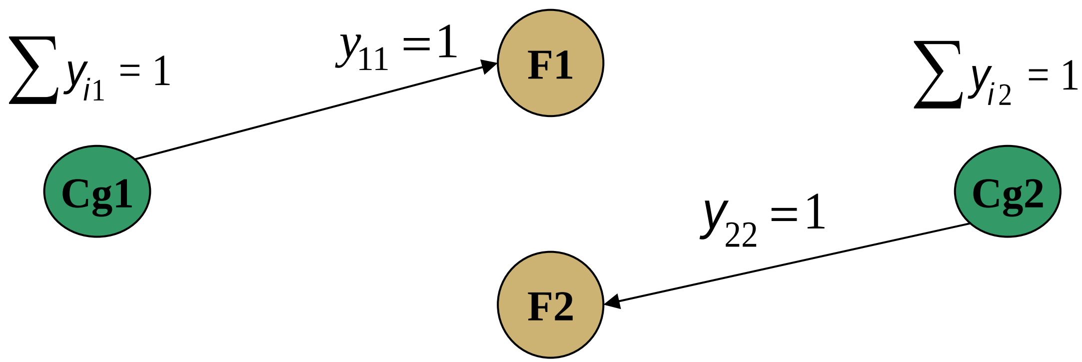
- A relação estéril/minério deve ser atendida:

$$\sum_{\substack{i \in Frentes \\ | estMin_i = 0}} x_i - rem \sum_{\substack{i \in Frentes \\ | estMin_i = 1}} x_i \geq 0$$

Alocação Dinâmica de Caminhões

- No máximo uma carregadeira operando em cada frente

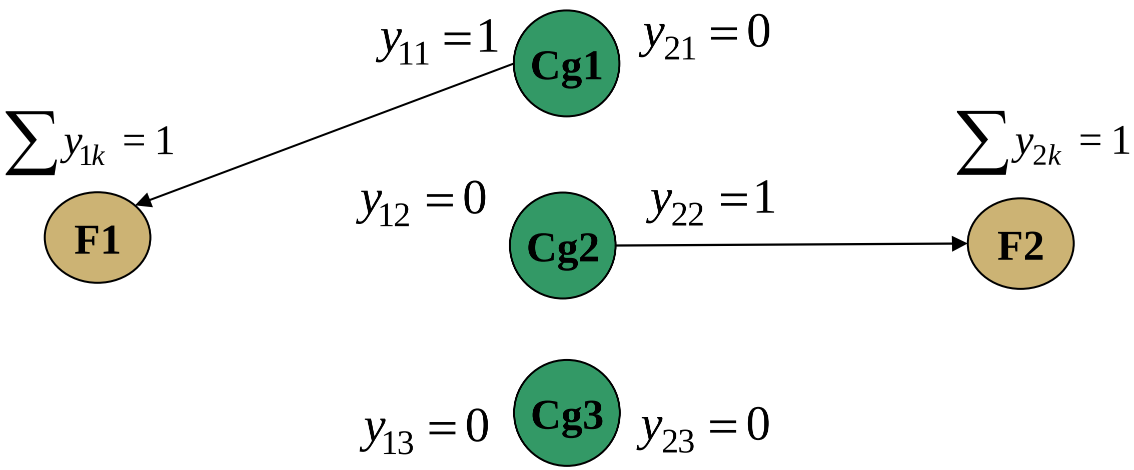
$$\sum_{k \in Carregadeiras} y_{ik} \leq 1 \quad \forall i \in Frentes$$



Alocação Dinâmica de Caminhões

- Cada carregadeira deve operar em no máximo uma frente.

$$\sum_{i \in Frentes} y_{ik} \leq 1 \; \forall k \in Carregadeiras$$



Alocação Dinâmica de Caminhões

- O ritmo de lavra da frente i deve ser maior do que a produtividade mínima da carregadeira k alocada à frente

$$x_i \geq \sum_{k \in Carregadeiras} Cl_k y_{ik} \quad \forall i \in Frentes$$

- O ritmo de lavra da frente i deve ser menor do que a produtividade máxima da carregadeira k alocada à frente

$$x_i \leq \sum_{k \in Carregadeiras} Cu_k y_{ik} \quad \forall i \in Frentes$$

Alocação Dinâmica de Caminhões

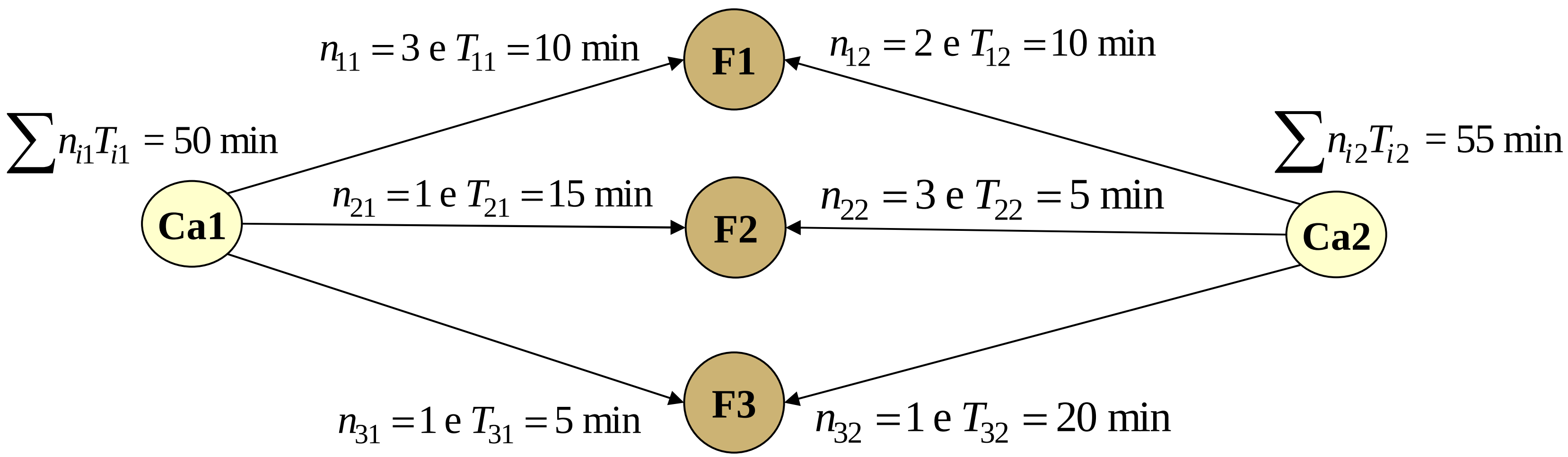
- Cada caminhão l deve realizar viagens apenas à uma frente i que esteja alocada uma carregadeira compatível

$$n_{il}\, tempCiclo_i \leq \sum_{\substack{k \in Carregadeiras \\ | comp_{lk}=1}} 60\, y_{ik} \quad \forall i \in Frentes, \forall l \in Caminhoes$$

$$n_{il} \in Z^{+} \quad \forall i \in Frentes, \forall l \in Caminhoes$$

- Cada caminhão l deve operar no máximo 60 minutos

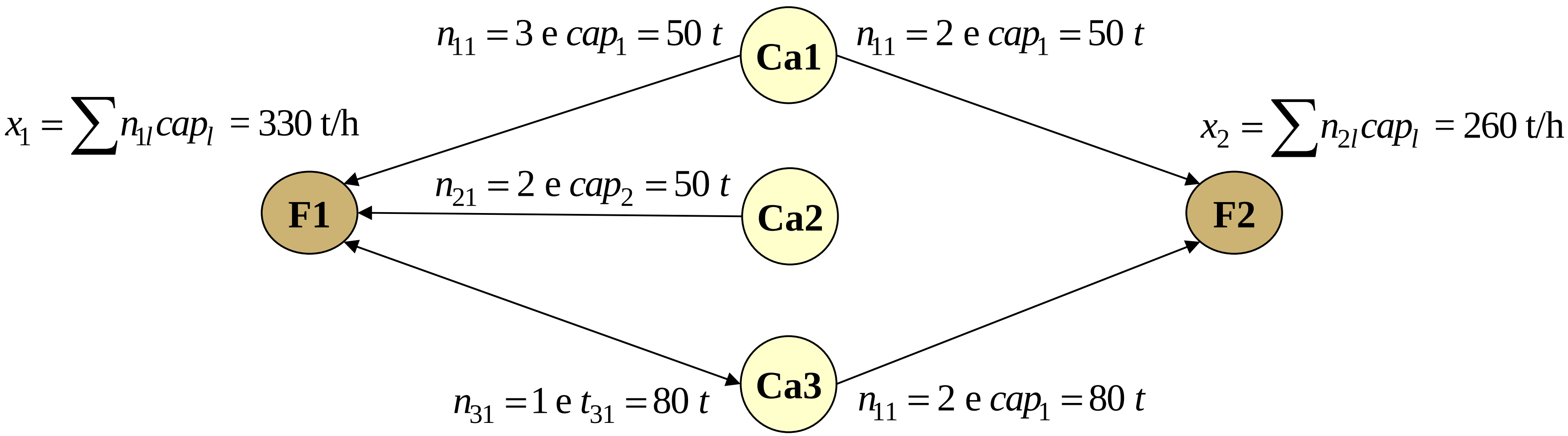
$$\sum_{i \in Frentes} n_{il}\, tempCiclo_i \leq 60 \quad \forall l \in Caminhoes$$



Alocação Dinâmica de Caminhões

- O ritmo de lavra da frente i deve ser igual à produção realizada pelos caminhões alocados à frente

$$x_i = \sum_{l \in Caminhoes} n_{il} \, capCam_l \quad \forall i \in Frentes$$



Alocação Dinâmica de Caminhões

- Um caminhão é usado se ele faz alguma viagem a alguma frente

$$usou_l \geq \frac{\sum_{i \in Frentes} tempCiclo_i \, n_{il}}{60} \quad \forall l \in Caminhoes$$

$$usou_l \in \{0,1\} \quad \forall l \in Caminhoes$$