

Estruturas de Dados I

Filas de Prioridade

Igor Machado Coelho

14/10/2020 - rev. 26/08/2021

- 1 Filas de Prioridade
- 2 Tipo Abstrato: Fila de Prioridade
- 3 Operações em um *heap*
- 4 Implementação Heap em C/C++
- 5 Agradecimentos

Tópico 1

Filas de Prioridade

Pré-Requisitos

São requisitos para essa aula:

- Introdução/Fundamentos de Programação (em alguma linguagem de programação)
- Interesse em aprender C/C++
- Noções de tipos de dados
- Noções de listas e encadeamento
- Aula de filas
- Aula de árvores

Tópico 2

Tipo Abstrato: Fila de Prioridade

Fila de Prioridade

A Fila de Prioridade (do inglês *Priority Queue*) é um Tipo Abstrato de Dado (TAD) que opera de forma similar a uma Fila.

Lembramos que o TAD Fila tem comportamento FIFO (*first-in first-out*), onde o elemento de *maior prioridade para sair da fila* é o elemento que *entrou primeiro na fila*.

O conceito de *prioridade* é explicitado nas Filas de Prioridade através de um *valor numérico*. Nesse caso, a lógica de prioridade pode operar pelo *menor* ou pelo *maior* valor, dependendo da aplicação.

Filas de Prioridade na Computação

Filas de Prioridade são estruturas fundamentais na própria computação. Também são úteis na implementações de algoritmos em grafos, como a busca por *árvores geradoras mínimas* (aulas futuras).

Por exemplo, quando se envia pacotes de dados a roteadores, existem mecanismos que podem tirar vantagem de *valores de prioridade* entre pacotes (dados de voz e de download, etc). Uma interpretação cotidiana poderia ser uma *fila prioritária por idade*, na qual os indivíduos *mais velhos* seriam sempre atendidos antes dos *mais novos*.



Figura 1: Fila de Prioridade - CC BY 3.0 - thenounproject.com

Operações de uma Fila de Prioridade

Uma Fila de Prioridade é uma estrutura de dados com uma *direção pre-definida* (vamos assumir *maior prioridade para o menor valor*), consistindo de 3 operações básicas:

- frente “mais prioritária” (*peek min* ou *find min*)
- enfileira (*enqueue, push* ou *insert*)
- desenfileira “mais prioritário” (*dequeue min, pop min* ou *extract min*)

As operações trabalham com *chaves numéricas* e, opcionalmente, um conteúdo atrelado a cada chave. Outra operação comum no TAD, embora considerada uma *operação interna*, é a de *redução de chave* (*decrease key*).

Implementações

A implementação do TAD Fila de Prioridade geralmente se dá através de uma implementação de *árvores de prioridade* denominada *heap* binário. O heap (ou *min heap*) é uma *árvore binária completa* com a seguinte propriedade:

- se x é pai de y , então $x \leq y$

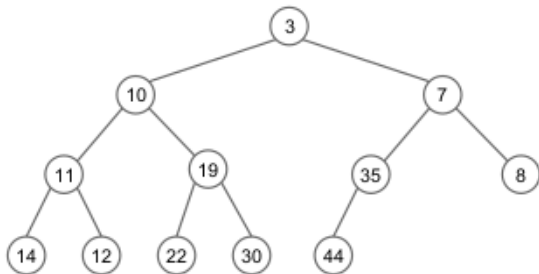


Figura 2: Min-Heap. Créditos: Fabiano Oliveira

Definição do *Conceito* Fila de Prioridade em C++

O *conceito* de fila de prioridade somente requer suas três operações básicas. Como consideramos uma *fila de prioridade genérica* (fila de inteiro, char, etc), definimos um *conceito genérico* chamado FilaPrioridadeTAD:

```
template<typename Agregado, typename Tipo>
concept bool
FilaPrioridadeTAD = requires(Agregado a, Tipo t)
{
    // requer operação 'frente' mais prioritária
    { a.frente() };
    // requer operação 'insere' sobre tipo 't'
    { a.insere(t) };
    // requer operação 'remove' mais prioritário
    { a.remove() };
};
```

Note que o tipo genérico pode ser estendido para comportar um elemento interno, além da chave numérica.

Utilização da Fila de Prioridade

Antes de completar as funções, utilizaremos o FilaPrioridadeTAD:

```
int main () {
    FilaPrioridadeTAD h = // ... inicializa tipo
    // h.cria();
    h.insere(20);
    h.insere(10);
    h.insere(30);
    printf("%c\n", h.frente());
    printf("%c\n", h.remove());
    h.insere(25);
    while(p.N > 0)
        printf("%c\n", h.remove());
    // h.libera();
    return 0;
}
```

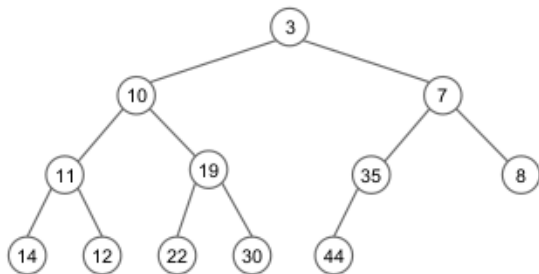
Verifique as impressões em tela: 10 10 20 25 30

Tópico 3

Operações em um *heap*

Implementação *heap* com vetor

Apesar de sua estrutura de árvore, podemos representá-la eficientemente com um vetor, numa implementação puramente sequencial.



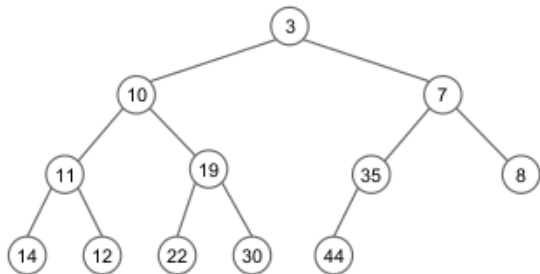
Representação por níveis (*árvore completa*):

| 3 | 10 | 7 | 11 | 19 | 35 | 8 | 14 | 12 | 22 | 30 | 44 |

Assim, os dados sempre estarão em um *espaço contíguo* de memória.

Algoritmo FilaPrioridadeTAD *frente*

A operação *frente* retorna o elemento mais prioritário do heap. Felizmente, ele sempre será a raiz da árvore!



Representação por níveis (*árvore completa*):

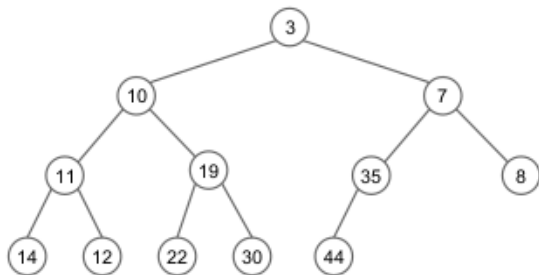
| 3 | 10 | 7 | 11 | 19 | 35 | 8 | 14 | 12 | 22 | 30 | 44 |

Desafio: verifique se é possível o elemento mais prioritário não estar na raiz do heap.

Algoritmo FilaPrioridadeTAD *insere* - Parte 1/2

A operação *insere* em adiciona um novo elemento de acordo com sua prioridade. Como manter a corretude das propriedades do heap?

Exemplo: como inserir o elemento 5?



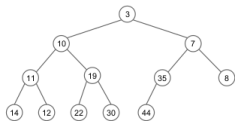
Representação por níveis (*árvore completa*):

| 3 | 10 | 7 | 11 | 19 | 35 | 8 | 14 | 12 | 22 | 30 | 44 |

Algoritmo FilaPrioridadeTAD *insere* - Parte 2/2

Para manter a corretude das propriedades do heap, em especial, de uma *árvore completa*, adicionamos o elemento na *última posição do vetor*.

Exemplo: como inserir o elemento 5?



Representação por níveis (*árvore completa*):

| 3 | 10 | 7 | 11 | 19 | 35 | 8 | 14 | 12 | 22 | 30 | 44 |

Como *corrigir* a árvore? **Solução:** trocas sucessivas *subindo* até a raiz.

| 3 | 10 | 7 | 11 | 19 | 35 | 8 | 14 | 12 | 22 | 30 | 44 | 5 |

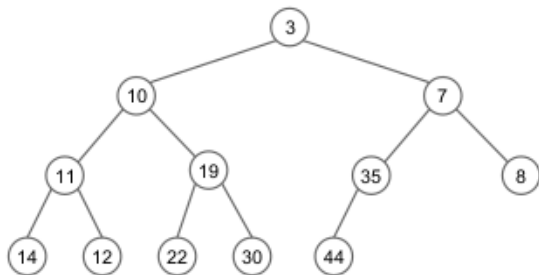
| 3 | 10 | 7 | 11 | 19 | *5 | 8 | 14 | 12 | 22 | 30 | 44 | *35 |

| 3 | 10 | *5 | 11 | 19 | *7 | 8 | 14 | 12 | 22 | 30 | 44 | *35 |

Algoritmo FilaPrioridadeTAD *remove* - Parte 1/2

A operação *remove* em adiciona um novo elemento de acordo com sua prioridade. Como manter a corretude das propriedades do heap?

Exemplo: como remover o elemento 3?



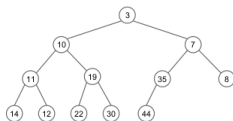
Representação por níveis (*árvore completa*):

| 3 | 10 | 7 | 11 | 19 | 35 | 8 | 14 | 12 | 22 | 30 | 44 |

Algoritmo FilaPrioridadeTAD *remove* - Parte 2/2

Para manter a corretude das propriedades do heap, em especial, de uma *árvore completa*, trocamos o *primeiro* com o *último* elemento do vetor.

Exemplo: como remover o elemento 3?



Representação por níveis (*árvore completa*):

| 3 | 10 | 7 | 11 | 19 | 35 | 8 | 14 | 12 | 22 | 30 | 44 |

Como *corrigir* a árvore? **Solução:** trocas sucessivas *descendo* até uma folha.

44	10	7	11	19	35	8	14	12	22	30	3
*7	10	*44	11	19	35	8	14	12	22	30	3
*7	10	*8	11	19	35	*44	14	12	22	30	3
*7	10	*8	11	19	35	*44	14	12	22	30	x

Tópico 4

Implementação Heap em C/C++

Implementação Heap em C/C++

Aula: Fila de Prioridade - Parte II

Prof. Igor Machado Coelho

<https://github.com/igormcoelho/curso-estruturas-de-dados-i>

Revisão 26/08/2021

Implementação Heap1

Consideraremos uma fila sequencial com, no máximo, MAXN elementos do tipo caractere.

```
constexpr int MAX_N = 50; // capacidade máxima da fila
class Heap1
{
public:
    int elementos [MAX_N]; // elementos na fila
    int N; // num. de elementos na fila
    void cria () { ... } // inicializa agregado
    void libera () { ... } // finaliza agregado
    int frente () { ... }
    void insere (int chave){ ... }
    int remove () { ... }
};
// verifica se agregado Heap1 satisfaz conceito FilaPrioridade
static_assert(FilaPrioridadeTAD<Heap1, int>);
```

Implementação Heap1 - cria/libera

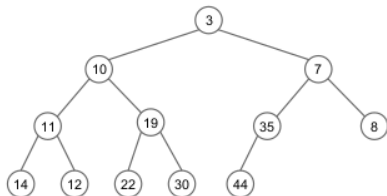
A operação `cria` inicializa a fila para uso, e a função `libera` desaloca os recursos dinâmicos.

```
class Heap1 {  
    ...  
    void cria() {  
        this->N = 0;  
    }  
  
    void libera() {  
        // nenhum recurso dinâmico para desalocar  
    }  
    ...  
}
```

Implementação Heap1 - frente

A operação frente retorna a raiz do heap, ou seja, o primeiro elemento. Este é sempre o mais prioritário.

```
class Heap1 {  
    ...  
    int frente() {  
        return this->elementos[0];  
    }  
    ...  
}
```



Representação por níveis (*árvore completa*):

| 3* | 10 | 7 | 11 | 19 | 35 | 8 | 14 | 12 | 22 | 30 | 44 |

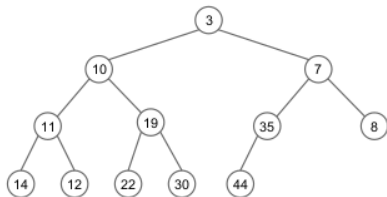
Implementação Heap1 - pai e filho

Métodos auxiliares pai e filho.

```
class Heap1 {
...
int pai(int pos) {
    return (pos - 1) / 2;
}

int filho1(int pos) {
    return (2 * pos) + 1;
}

int filho2(int pos) {
    return filho1(pos) + 1;
}
...
}
```



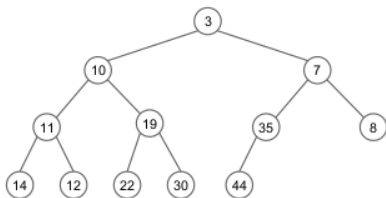
Representação por níveis:

	3		10		7		11		19		35		...
	0		1		2		3		4		5		

Implementação Heap1 - sobe

A operação sobe compara sistematicamente um nó com seu pai, efetuando trocas enquanto a prioridade estiver incorreta. Custo: proporcional ao nível.

```
class Heap1 {
...
void sobe(int pos) {
    int p = pai(pos);
    while (pos > 0) {
        // compara filho com pai
        if (elementos[pos] >=
            elementos[p]);
            break;
        troca(p, pos, elementos);
        pos = p;    // repete
        p = pai(pos);
    }
}
```



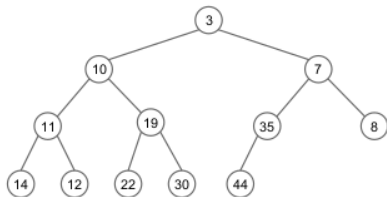
Representação por níveis:

3	10	7	11	19	35	...
8	14	12	22	30	44	

Implementação Heap1 - insere

O método `insere` coloca o novo elemento no final do heap e invoca a operação `sobe`. Custo: altura da árvore.

```
class Heap1 {  
    ...  
    void insere(int pos) {  
        elementos[N] = pos;  
        N++;  
        sobe(N-1);  
    }  
    ...  
}
```



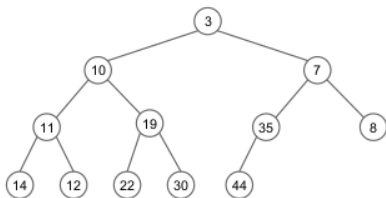
Representação por níveis:

```
| 3 | 10 | 7 | 11 | 19 | 35 | ...  
| 8 | 14 | 12 | 22 | 30 | 44 |
```

Implementação Heap1 - desce

A operação desce compara um nó com seus filhos, trocando enquanto a prioridade for incorreta. Custo: proporcional ao nível.

```
class Heap1 {
...
void desce(int pos) {
    int f = filho1(pos);
    while (f < N) {
        // existe segundo filho?
        if ((f < N-1) &&
(elementos[f+1]<elementos[f]))
            f = f + 1;
        if (elementos[f] >=
            elementos[pos]) break;
        troca(f, pos, elementos);
        pos = f; f = filho1(pos);
    }
}
```



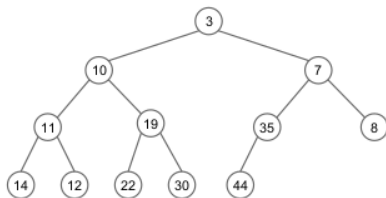
Representação por níveis:

3	10	7	11	19	35	...
8	14	12	22	30	44	

Implementação Heap1 - remove

O método `remove` troca o primeiro com último elemento e invoca a operação `desce`. Custo: altura da árvore.

```
class Heap1 {
...
int remove() {
    troca(0, N-1, elementos);
    N--;
    desce(0);
    return elementos[N];
}
...
}
```



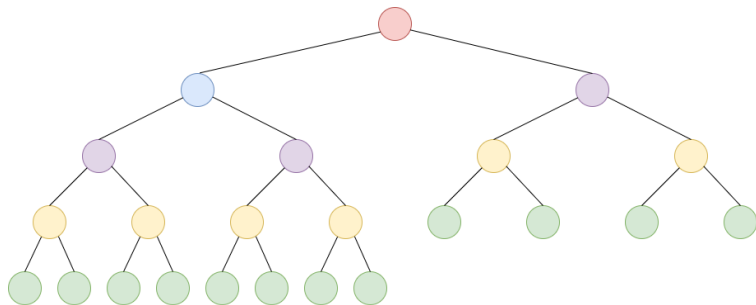
Representação por níveis:

	3		10		7		11		19		35		...	
			8		14		12		22		30		44	

Heapify / Constrói

A construção de um heap através de um vetor é chamada de *heapify*. É possível efetuar a construção de forma iterativa, através dos métodos *sobe* ou *desce*.

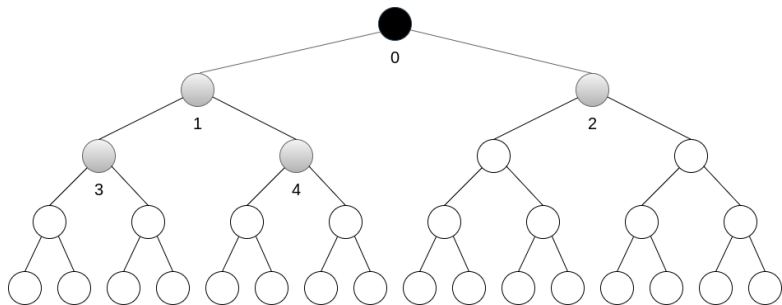
Como vimos anteriormente, o método *sobe* custa, no máximo, o nível do nó, enquanto o método *desce* custa, no máximo, a altura do nó.



Veja as alturas dos nós ($N=23$): vermelho(5), azul(4), roxo(3), amarelo(2), verde(1). Metade dos nós (12) tem altura 1.

Heapify com *sobe*

A construção do heap ($N = 31$) com o método *sobe* opera sequencialmente a partir dos nós 1, 2, 3, 4..., e a raiz não efetua nenhuma troca. Cada elemento folha ($\approx N/2$) irá incorrer em $O(h = \lceil \lg N \rceil)$ trocas, no pior caso, tendo assim complexidade $O(N \lg N)$.



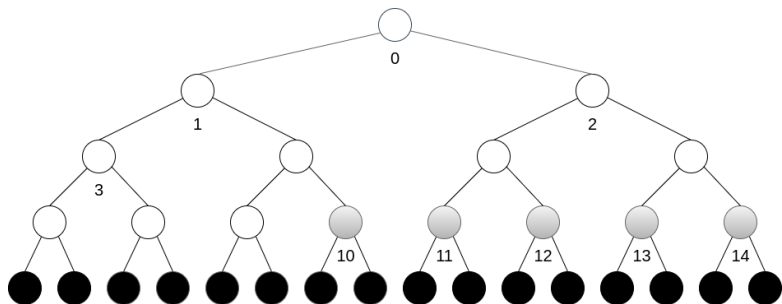
nós: | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... ->

Método Heapify com *sobe*

```
class Heap1 {  
    ...  
    void constroi_sobe(int v[], int N) {  
        for (int i = 1; i < N; i++)  
            this->elementos[i] = v[i];  
        this->N = N;  
        for (int i = 1; i < N; i++)  
            sobe(i);  
    }  
    ...  
}
```

Heapify com *desce*

A construção do heap ($N = 31$) com o método *desce* toma vantagem de que as folhas ($\approx N/2$) tem altura 1, portanto não necessitando de troca alguma. O método opera sequencialmente em ordem decrescente a partir do nó $\lfloor N/2 \rfloor - 1 = 14$ como 14, 13, 12, 11, 10, Note que um único elemento (a raiz) irá incorrer em $O(h = \lceil \lg N \rceil)$ trocas, sendo a complexidade $O(N \lg N)$ superestimada neste caso.



nós: | 0 | 1 | ... <- | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | ...

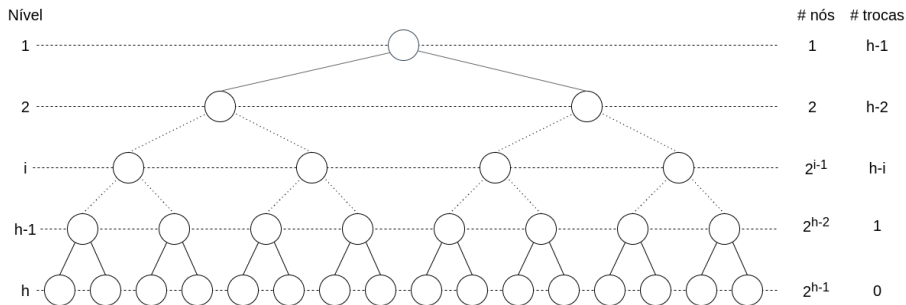
Método Heapify com *desce*

```
class Heap1 {  
    ...  
void constroi_desce(int v[], int N) {  
    for (int i = 1; i < N; i++)  
        this->elementos[i] = v[i];  
    this->N = N;  
    for (int i = N / 2 - 1; i >= 0; i--)  
        desce(i);  
}  
    ...  
}
```

Análise do Método Heapify com *desce*

Consideramos uma árvore com N nós e $h = \lceil \lg N \rceil$ níveis. No nível 1, um único nó (a raiz) efetua $h-1$ trocas, no pior caso. Por outro lado, existem 2^{h-1} folhas que não fazem nenhuma troca.

De forma geral, no nível i , cada um dos 2^{i-1} nós efetua $h-i$ trocas, no pior caso, totalizando $\sum_{i=1}^{h-1} (2^{i-1}(h-i))$ trocas.



Análise do Método Heapify com *desce*

Temos que $\sum_{i=1}^{h-1} (2^{i-1}(h-i)) = 2^h - (h+1)$, dado que $\sum_{i=0}^m 2^i = 2^{m+1} - 1$.
 Desmembramos em cada linha i abaixo as $h-i$ ocorrências de 2^{i-1} , de $i = 1$ até $h-1$. Efetuamos então uma soma por colunas.

$$\begin{array}{r}
 \overbrace{\hspace{10em}}^{H-1} \\
 i = 1 : \quad 1 \quad + \quad 1 \quad + \cdots + \quad 1 \quad + \quad 1 \quad + \quad 1 \quad + \quad 1 \\
 i = 2 : \quad + \quad 2 \quad + \quad 2 \quad + \cdots + \quad 2 \quad + \quad 2 \quad + \quad 2 \\
 i = 3 : \quad + \quad 4 \quad + \quad 4 \quad + \cdots + \quad 4 \quad + \quad 4 \\
 i = 4 : \quad + \quad 8 \quad + \quad 8 \quad + \cdots + \quad 8 \\
 \quad \quad i : \quad + \quad \cdots \quad + \quad \cdots \quad + \cdots \\
 i = h-2 : + \quad 2^{h-3} \quad + \quad 2^{h-3} \\
 i = h-1 : + \quad 2^{h-2} \quad + \\
 = \sum_{i=0}^{h-2} 2^i + \sum_{i=0}^{h-3} 2^i + \cdots + \sum_{i=0}^3 2^i + \sum_{i=0}^2 2^i + \sum_{i=0}^1 2^i + \sum_{i=0}^0 2^i \\
 = (2^{h-1}-1) + (2^{h-2}-1) + \cdots + (2^3-1) + (2^2-1) + (2^1-1) \\
 = 2^{h-1} + 2^{h-2} + \cdots + 2^3 + 2^2 + 2^1 - (h-1) \\
 = \sum_{i=0}^{h-1} 2^i - h = 2^h - (h+1) \quad \square
 \end{array}$$

Análise do Método Heapify com *desce*

Temos então que o total de trocas do heapify é $2^h - (h+1)$, e considerando uma altura $h = \lceil \lg N \rceil = O(\lg N)$, temos:

$$2^{O(\lg N)} - (O(\lg N) + 1) = O(N)$$

Na prática, para $N = 31$ e, portanto, $h = 5$, temos:

$$8 \times 1 + 4 \times 2 + 2 \times 3 + 1 \times 4 = 26 \text{ trocas.}$$

Veja código em materiais.

Agradecimentos ao Prof. Fabiano Oliveira, pelo embasamento dessa prova.

Bibliografia Recomendada

Além da bibliografia do curso, recomendamos para esse tópico:

- Szwarcfiter, J.L.; Markenzon, L. Estruturas de Dados e seus Algoritmos. Rio de Janeiro, LTC, 1994. Bibliografia Adicional:
- Cerqueira, R.; Celes, W.; Rangel, J.L. Introdução a estruturas de dados: com técnicas de programação em C. Editora, 2004.
- Cormen, T.H.; Leiserson, C.E.; Rivest, R.L.; Stein Algoritmos: Teoria e Prática. Ed. Campus, 2002.
- Cormen, T.H.; Leiserson, C.E.; Rivest, R.L.; Stein, C. Introduction to Algorithms, 3rd ed.. The MIT Press, 2009.
- Preiss, B.R. Estruturas de Dados e Algoritmos Ed. Campus, 2000;
- Knuth, D.E. The Art of Computer Programming - Vols I e III. 2nd Edition. Addison Wesley, 1973.
- Graham, R.L., Knuth, D.E., Patashnik, O. Matemática Concreta. Segunda Edição, Rio de Janeiro, LTC, 1995.
- Livro “The C++ Programming Language” de Bjarne Stroustrup
- Dicas e normas C++: <https://github.com/isocpp/CppCoreGuidelines>

Tópico 5

Agradecimentos

Pessoas

Em especial, agradeço aos colegas que elaboraram bons materiais, como o prof. Fabiano Oliveira (IME-UERJ), e o prof. Jayme Szwarcfiter cujos conceitos formam o cerne desses slides.

Estendo os agradecimentos aos demais colegas que colaboraram com a elaboração do material do curso de **Pesquisa Operacional**, que abriu caminho para verificação prática dessa tecnologia de slides.

Software

Esse material de curso só é possível graças aos inúmeros projetos de código-aberto que são necessários a ele, incluindo:

- pandoc
- LaTeX
- GNU/Linux
- git
- markdown-preview-enhanced (github)
- visual studio code
- atom
- revealjs
- gromit-mpx (screen drawing tool)
- xournal (screen drawing tool)
- ...

Empresas

Agradecimento especial a empresas que suportam projetos livres envolvidos nesse curso:

- github
- gitlab
- microsoft
- google
- ...

Reprodução do material

Esses slides foram escritos utilizando pandoc, segundo o tutorial ilectures:

- <https://igormcoelho.github.io/ilectures-pandoc/>

Exceto expressamente mencionado (com as devidas ressalvas ao material cedido por colegas), a licença será Creative Commons.

Licença: CC-BY 4.0 2020

Igor Machado Coelho

This Slide Is Intentionally Blank (for goomit-mpx)