

Estruturas de Dados I

Pilhas

Igor Machado Coelho

16/09/2020 - 13/04/2023

- 1 Pilhas
- 2 Tipo Abstrato: Pilha
- 3 Pilhas Sequenciais
- 4 Pilhas Encadeadas
- 5 Pilhas Genéricas e Conceitos de Pilha
- 6 Pilhas na Biblioteca Padrão e Aplicações
- 7 Análise de Complexidade

8 Agradecimentos

Section 1

Pilhas

Pré-Requisitos

São requisitos para essa aula o conhecimento de:

- Introdução/Fundamentos de Programação (em alguma linguagem de programação)
- Interesse em aprender C/C++
- Noções de tipos de dados
- Noções de listas e encadeamento

Section 2

Tipo Abstrato: Pilha

Pilha

A Pilha (do inglês *Stack*) é um Tipo Abstrato de Dado (TAD) que pode ser compreendida como vemos no cotidiano.

Em uma *pilha de pratos*, por exemplo:

- Só se consegue “inserir” (empilhar) novos pratos no *topo* da pilha
- Só podemos “remover” (desempilhar) os pratos do *topo* da pilha



Figure 1: Pilhas

Pilhas na computação

Pilhas são estruturas fundamentais na própria computação.

Por exemplo, as chamadas de uma função recursiva podem ser feitas utilizando uma pilha!

... e é precisamente desta maneira que o sistema operacional consegue executar várias de suas funções internas!

Linguagens de programação como Java, C# e Python são implementadas através de operações em pilhas.

Operações de uma Pilha

Uma Pilha é uma estrutura de dados linear (assim como estruturas de lista), consistindo de 3 operações básicas:

- topo
- empilhar (*push*)
- desempilhar (*pop*)

Seu comportamento é descrito como LIFO (last-in first-out), ou seja, o *último* elemento a entrar na pilha será o *primeiro* a sair.

Implementações

De forma geral, uma pilha pode ser implementada utilizando uma lista linear, porém com acesso aos elementos restritos a uma única extremidade dessa lista.

$$\Leftrightarrow | C | B | A |$$

Em C/C++, os métodos esperados para uma pilha de tipo `t` são: `topo()`, `empilha(t)`, `desempilha()`, `tamanho()`.

Section 3

Pilhas Sequenciais

Pilhas Sequenciais

As Pilhas Sequenciais utilizam um array para armazenar os dados. Assim, os dados sempre estarão em um *espaço contíguo* de memória.

Implementação

Consideraremos uma pilha sequencial com, no máximo, MAXN elementos do tipo caractere.

```
constexpr int MAXN = 100'000; // capacidade máxima da pilha
class PilhaSeq1
{
public:
    char elementos [MAXN];      // elementos na pilha
    int N;                      // num. de elementos na pilha
    void cria () { ... }       // inicializa agregado
    void libera () { ... }     // finaliza agregado
    char topo () { ... }
    void empilha (char dado){ ... };
    char desempilha () { ... };
    int tamanho() { ... };
};
```

Utilização da Pilha

Antes de completar as funções pendentes, utilizaremos a PilhaSeq1:

```
int main () {
    PilhaSeq1 p;
    p.cria();
    p.empilha('A');
    p.empilha('B');
    p.empilha('C');
    print("{}\n", p.topo());
    print("{}\n", p.desempilha());
    p.empilha('D');
    while(p.tamanho() > 0)
        print("{}\n", p.desempilha());
    p.libera();
    return 0;
}
```

Verifique as impressões em tela: C C D B A

Implementação: Cria e Libera

A operação `cria` inicializa a pilha para uso, e a função `libera` desaloca os recursos dinâmicos.

```
class PilhaSeq1 {  
    ...  
    void cria() {  
        this->N = 0;  
    }  
  
    void libera() {  
        // nenhum recurso dinâmico para desalocar  
    }  
    ...  
}
```

Implementação: Empilha / Desempilha

A operação empilha em uma pilha sequencial adiciona um novo elemento ao topo da pilha. A operação desempilha em uma pilha sequencial remove e retorna o último elemento da pilha.

```
class PilhaSeq1 {  
    ...  
    void empilha(char dado) {  
        this->elementos[this->N] = dado;  
        this->N++;                // N = N + 1  
    }  
  
    char desempilha() {  
        this->N--;                // N = N - 1  
        return elementos[this->N];  
    }  
    ...  
}
```


Implementação: Topo

A operação de topo em uma pilha sequencial retorna o último elemento empilhado.

```
class PilhaSeq1 {  
    ...  
    char topo()    { return this->elementos[this->N-1]; }  
    int tamanho() { return this->N; }  
    ...  
}
```

Desafio: O que aconteceria se a pilha estivesse vazia e o `topo()` fosse invocado? Como permitir que o programa continue mesmo após situações inesperadas como essa?

Dica: Retorne um `char` **opcional**, com uma pequena modificação na função `topo()`. Exemplo: `std::optional<char> topo() { ... }`.

Exemplo de uso

Considere uma pilha sequencial (MAXN=5): `PilhaSeq1 p; p.cria();`

```
p.N: | 0 |      p.elementos: |   |   |   |   |   |
                                0   1   2   3   4
```

Agora, empilhamos A, B e C, e depois desempilhamos uma vez.

```
p.N: | 1 |      p.elementos: | A |   |   |   |   |
                                0   1   2   3   4
```

```
p.N: | 2 |      p.elementos: | A | B |   |   |   |
                                0   1   2   3   4
```

```
p.N: | 3 |      p.elementos: | A | B | C |   |   |
                                0   1   2   3   4
```

```
p.N: | 2 |      p.elementos: | A | B |   |   |   |
                                0   1   2   3   4
```

Qual o topo atual da pilha?

Análise Preliminar: Pilha Sequencial

A Pilha Sequencial tem a vantagem de ser bastante simples de implementar, ocupando um espaço constante (na memória) para todas operações.

Porém, existe a limitação física de MAXN posições imposta pela alocação estática, não permitindo que a pilha ultrapasse esse limite.

Desafio: implemente uma Pilha Sequencial utilizando alocação dinâmica para o vetor elementos. Assim, quando não houver espaço para novos elementos, aloque mais espaço na memória (copiando elementos existentes para o novo vetor).

Dica: Experimente a estratégia de *dobrar a capacidade* da pilha (quando necessário), e reduzir à metade a capacidade (quando necessário). Essa estratégia é bastante eficiente, mas requer alteração nos métodos *cria*, *libera*, *empilha* e *desempilha*.

Section 4

Pilhas Encadeadas

Pilhas Encadeadas

A implementação do TAD Pilha pode ser feito através de uma *estrutura encadeada* com alocação dinâmica de memória.

A vantagem é não precisar pre-determinar uma capacidade máxima da pilha (o limite é a memória do computador!). A desvantagem é depender de implementações ligeiramente mais complexas.

Implementação com ponteiros

Consideraremos uma pilha encadeada, utilizando um agregado NoPilha1 para conectar cada elemento da pilha:

```
class NoPilha1
{
public:
    char dado;
    NoPilha1* prox;
};

class PilhaEnc1
{
public:
    NoPilha1* inicio;
    int N;
    void cria () { ... }
    void libera () { ... }
    char topo () { ... }
    void empilha (char dado){ ... }
    char desempilha () { ... }
    int tamanho() { ... }
};

// verifica agregado PilhaEnc1
static_assert(PilhaTAD<PilhaEnc1, char>);
```

Implementação: Cria

```
class PilhaEnc1 {  
    ...  
    void cria() {  
        this->N = 0;           // zero elementos na pilha  
        this->inicio = 0;    // endereço zero de memória  
    }  
    ...  
}
```

Exemplo de uso

Variável local do tipo Pilha Encadeada:

```
PilhaEnc1 p;  
p.cria();
```

Visualização da memória

p.N: 0 **p.inicio: 0** *topo* $\leftarrow \epsilon$

0	4	...	100	104	108	112	116	...	8GiB	

Implementação: Empilha

```
void empilha(char v) {
    auto* no = new NoPilha1{.dado = v, .prox = this->inicio};
    this->inicio = no;
    this->N++;           // N = N + 1
}
```

Na memória: p.empilha('A'); p.empilha('B');

p.N: 0	p.inicio: 0	<i>topo</i> ← ϵ							
0	4	...	100	104	108	112	116	...	8GiB
p.N: 1	p.inicio: 112	<i>topo</i> ← A							
0	4	...	100	104	108	112	116	...	8GiB
p.N: 2	p.inicio: 100	<i>topo</i> ← B ← A							
0	4	...	100	104	108	112	116	...	8GiB

Implementação: Desempilha

```

char desempilha() {
    NoPilha1* p = this->inicio->prox;
    char r = this->inicio->dado;
    delete this->inicio;
    this->inicio = p;
    this->N--;           //N=N-1
    return r;
}

```

```

class NoPilha1
{
public:
    char dado;
    NoPilha1* prox;
};

```

Na memória: p.desempilha();

p.N: 2 **p.inicio: 100** $topo \leftarrow B \leftarrow A$

					B		112				A		0						
	0		4		...		100		104		108		112		116		...		8GiB

p.N: 1 **p.inicio: 112** $topo \leftarrow A$

											A		0						
	0		4		...		100		104		108		112		116		...		8GiB

Implementação: Libera

```
void libera() {
    while (this->N > 0) {
        NoPilha1* p = this->inicio->prox;
        delete this->inicio;    this->inicio = p;    this->N--;
    }
}
```

Na memória: p.libera();

p.N: 2 **p.inicio: 100** *topo* ← B ← A

					B		112				A		0						
	0		4		...		100		104		108		112		116		...		8GiB

p.N: 1 **p.inicio: 112** *topo* ← A

											A		0						
	0		4		...		100		104		108		112		116		...		8GiB

p.N: 0 **p.inicio: 0** *topo* ← ε

	0		4		...		100		104		108		112		116		...		8GiB

Implementação com ponteiros inteligentes

Para uma implementação mais segura, é possível utilizar *smart pointers*. Em especial, basta utilizar o `std::unique_ptr`. Para simplificar a sintaxe, consideramos o seguinte “atalho” para o nome dos ponteiros únicos:

```
template<typename T>  
using uptr = std::unique_ptr<T>;
```

Dessa forma, basta escrever `uptr<int>` para representar um `std::unique_ptr<int>`.

Implementação com ponteiros inteligentes

Consideraremos uma pilha encadeada, utilizando um agregado NoPilha2 para conectar cada elemento da pilha:

```
class NoPilha2          class PilhaEnc2
{
public:
    char dado;          uptr<NoPilha2> inicio;
    uptr<NoPilha2> prox; int N;
};                      void cria () { ... }
                        void libera () { ... }
                        char topo () { ... }
                        void empilha (char dado){ ... }
                        char desempilha () { ... }
                        int tamanho() { ... }
};
// verifica agregado PilhaEnc2
static_assert(PilhaTAD<PilhaEnc2, char>);
```

Implementação: Cria

```
class PilhaEnc2 {  
    ...  
    void cria() {  
        this->N = 0;           // zero elementos na pilha  
        // this->inicio = 0; // não é necessário inicializar  
    }  
    ...  
}
```

Implementação: Empilha

```
void empilha(char v) {  
    this->inicio = std::make_unique<NoPilha2>(  
        NoPilha2{.dado = v, .prox = std::move(this->inicio)}  
    );  
    this->N++;           //  $N = N + 1$   
}
```

Implementação: Desempilha

```
char desempilha() {  
    char r = this->inicio->dado;  
    this->inicio = std::move(this->inicio->prox);  
    this->N--;           //N=N-1  
    return r;  
}
```


Implementação: Libera (inseguro)

```
void libera() {  
    this->inicio.reset();  
    // todo o resto é destruído automaticamente  
    // CUIDADO com estouro de pilha (stack overflow!)  
}
```

Implementação: Libera (seguro)

```
void libera() {  
    // seguro contra stack overflow  
    while (this->tamanho() > 0) {  
        this->inicio = std::move(this->inicio->prox);  
        this->N--;  
    }  
}
```

Análise Preliminar: Pilha Encadeada

A Pilha Encadeada é flexível em relação ao espaço de memória, permitindo maior ou menor utilização.

Como desvantagem tende a ter acessos de memória ligeiramente mais lentos, devido ao espalhamento dos elementos por toda a memória do computador (perdendo as vantagens de acesso rápido na *memória cache*, por exemplo).

Também é considerada como desvantagem o gasto de espaço extra com ponteiros em cada elemento, o que não acontece na Pilha Sequencial.

Section 5

Pilhas Genéricas e Conceitos de Pilha

Pilha Sequencial Genérica

Uma implementação genérica da pilha sequencial pode ser feita utilizando templates, inclusive para o limite de capacidade (permitindo maior personalização caso a caso).

```
template<typename T, int MAXN>
class PilhaSeqX
{
public:
    T elementos [MAXN];           // elementos na pilha
    int N;                        // num. de elementos na pilha
    void cria () { ... }         // inicializa agregado
    void libera () { ... }      // finaliza agregado
    T topo () { ... }
    void empilha (T dado){ ... };
    T desempilha () { ... };
    int tamanho() { ... };
};
```

Utilizando a Pilha Genérica

Antes de completar as funções pendentes, utilizaremos a PilhaSeqX:

```
int main () {
    PilhaSeqX<char, 100'000> p;
    p.cria();
    p.empilha('A');
    p.empilha('B');
    p.empilha('C');
    print("{}\n", p.topo());
    print("{}\n", p.desempilha());
    p.empilha('D');
    while(p.tamanho() > 0)
        print("{}\n", p.desempilha());
    p.libera();
    return 0;
}
```

Verifique as impressões em tela: C C D B A

Definição do *Conceito* PilhaTAD em C++

O *conceito* de pilha somente requer suas três operações básicas. Como consideramos uma *pilha genérica* (pilha de inteiro, char, etc), definimos um *conceito genérico* chamado PilhaTAD:

```
template<typename Agregado, typename Tipo>
concept PilhaTAD = requires(Agregado a, Tipo t)
{
    // requer operação 'topo'
    { a.topo() };
    // requer operação 'empilha' sobre tipo 't'
    { a.empilha(t) };
    // requer operação 'desempilha'
    { a.desempilha() };
    // requer operação 'tamanho'
    { a.tamanho() };
};
```

Verificando se PilhaSeq1 satisfaz conceito PilhaTAD

O `static_assert` pode ser usado para assegurar a correteude de implementação do conceito `PilhaTAD`:

```
constexpr int MAXN = 100'000; // capacidade máxima da pilha
class PilhaSeq1 {
public:
    char elementos [MAXN];      // elementos na pilha
    int N;                      // num. de elementos na pilha
    // implementa métodos da Pilha
    // ...
};

// verifica se agregado PilhaSeq1 satisfaz conceito PilhaTAD
static_assert(PilhaTAD<PilhaSeq1, char>);
```


Verificando se PilhaEnc1 satisfaz conceito PilhaTAD

O `static_assert` pode ser usado para assegurar a corretude de implementação do conceito `PilhaTAD`:

```
class NoPilha1          class PilhaEnc1
{
public:
    char dado;
    NoPilha1* prox;
};

// implementa métodos da Pilha
// ...
};
// verifica agregado PilhaEnc1
static_assert(PilhaTAD<PilhaEnc1, char>);
```

Section 6

Pilhas na Biblioteca Padrão e Aplicações

Uso da `std::stack`

Em C/C++, é possível utilizar implementações *prontas* do TAD Pilha. A vantagem é a grande eficiência computacional e amplo conjunto de testes, evitando erros de implementação.

Na STL, basta fazer `#include<stack>` e usar métodos `push`, `pop` e `top`.

```
#include<stack>           // inclui pilha genérica
#include<fmt/core.h>      // inclui fmt::print
using fmt::print;

int main() {
    std::stack<char> p;    // pilha de char
    p.push('A');
    p.push('B');
    print("{}\n", p.top()); // imprime B
    p.pop();
    print("{}\n", p.top()); // imprime A
    return 0;
}
```

Problema prático com recursão vs pilha

Como reverter uma string? Exemplo: `rev("ESCOLA") => "ALOCSE"`.

```
std::string rev(std::string s) {  
    if (s.length() <= 1) return s;  
    // exclui primeiro caractere de s e adiciona no fim  
    // NOTA: "ESCOLA".substr(2) => "COLA"  
    std::string r = rev(s.substr(1)) + s[0];  
    return r;  
}
```

Solução do problema prático com pilha

Solução com pilha (sem recursão):

```
std::string revs(std::string s) {  
    std::stack<char> pchars;  
    for (char c : s) pchars.push(c);  
    std::string r;  
    // reconstrói string ao contrário  
    while (pchars.size() > 0) {  
        r += pchars.top();  
        pchars.pop();  
    }  
    return r;  
}
```

Definindo um TAD para `std::stack`

Desafio: escreva um *conceito* (utilizando o recurso C++ Concepts) para o `std::stack` da STL, considerando operações `push`, `pop` e `top`.

Dica: Utilize o *conceito* `PilhaTAD` apresentado no curso, e faça os devidos ajustes. Verifique se `std::stack` passa no teste com `static_assert`.

Você pode compilar o código proposto (começando pelo slide anterior em um arquivo chamado `material/3-pilhas/main_pilha_stl.cpp`) através do comando:

```
g++ --std=c++20 main_pilha_stl.cpp -o appPilha
```

Fim implementações

Fim parte de implementações.

Section 7

Análise de Complexidade

Pilha: Revisão Geral

- Para que serve uma pilha?
- Quais são os 3 métodos de uma pilha?
- Qual é a complexidade de cada método em uma Pilha Sequencial?
- Qual é a complexidade de cada método em uma Pilha Encadeada?
- Quais as vantagens e desvantagens de cada implementação de pilha?

Bibliografia Recomendada

Além da bibliografia do curso, recomendamos para esse tópico:

- Szwarcfiter, J.L.; Markenzon, L. Estruturas de Dados e seus Algoritmos. Rio de Janeiro, LTC, 1994. Bibliografia Adicional:
- Cerqueira, R.; Celes, W.; Rangel, J.L. Introdução a estruturas de dados: com técnicas de programação em C. Editora, 2004.
- Cormen, T.H.; Leiserson, C.E.; Rivest, R.L.; Stein Algoritmos: Teoria e Prática. Ed. Campus, 2002.
- Cormen, T.H.; Leiserson, C.E.; Rivest, R.L.; Stein, C. Introduction to Algorithms, 3rd ed.. The MIT Press, 2009.
- Preiss, B.R. Estruturas de Dados e Algoritmos Ed. Campus, 2000;
- Knuth, D.E. The Art of Computer Programming - Vols I e III. 2nd Edition. Addison Wesley, 1973.
- Graham, R.L., Knuth, D.E., Patashnik, O. Matemática Concreta. Segunda Edição, Rio de Janeiro, LTC, 1995.
- Livro “The C++ Programming Language” de Bjarne Stroustrup
- Dicas e normas C++: <https://github.com/isocpp/CppCoreGuidelines>

Section 8

Agradecimentos

Pessoas

Em especial, agradeço aos colegas que elaboraram bons materiais, como o prof. Fabiano Oliveira (IME-UERJ), e o prof. Jayme Szwarcfiter cujos conceitos formam o cerne desses slides.

Estendo os agradecimentos aos demais colegas que colaboraram com a elaboração do material do curso de Pesquisa Operacional, que abriu caminho para verificação prática dessa tecnologia de slides.

Software

Esse material de curso só é possível graças aos inúmeros projetos de código-aberto que são necessários a ele, incluindo:

- pandoc
- LaTeX
- GNU/Linux
- git
- markdown-preview-enhanced (github)
- visual studio code
- atom
- revealjs
- gromit-mpx (screen drawing tool)
- xournal (screen drawing tool)
- ...

Empresas

Agradecimento especial a empresas que suportam projetos livres envolvidos nesse curso:

- github
- gitlab
- microsoft
- google
- ...

Reprodução do material

Esses slides foram escritos utilizando pandoc, segundo o tutorial ilectures:

- <https://igormcoelho.github.io/ilectures-pandoc/>

Exceto expressamente mencionado (com as devidas ressalvas ao material cedido por colegas), a licença será Creative Commons.

Licença: CC-BY 4.0 2020

Igor Machado Coelho

This Slide Is Intentionally Blank (for goomit-mpx)